THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ DIDACTIQUE

Transposition didactique des notions de variables aléatoires et lois de probabilité

Borin, Mario; Job, Stéphanie

Award date:
2021

Awarding institution:
Universite de Namur

UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

TRANSPOSITION DIDACTIQUE DES NOTIONS DE VARIABLES ALEATOIRES ET LOIS DE PROBABILITE

Mémoire présenté pour l'obtention

du grade académique de master en « Sciences Mathématiques à finalité didactique »

Mario BORIN

Stéphanie JOB

Juin 2021

UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

TRANSPOSITION DIDACTIQUE DES NOTIONS DE VARIABLES ALEATOIRES ET LOIS DE PROBABILITE

Réalisé par Mario BORIN et Stéphanie JOB
Dirigé par Valérie HENRY

Mémoire présenté pour l'obtention

du grade académique de master en « Sciences Mathématiques à finalité didactique »

Juin 2021

Remerciements

Maintenant que nous arrivons au terme de ce mémoire, nous pouvons mettre de côté nos ordinateurs et Teams sans quoi nous n'aurions jamais pu travailler à distance au vu de la crise sanitaire. Nous pouvons enfin quitter cette vie virtuelle pour retrouver progressivement une vie réelle.

Nos remerciements s'adressent avant tout à notre promotrice, Valérie Henry, qui nous a guidés tout au long de la réalisation de ce mémoire. Sa disponibilité et son soutien nous ont été d'une grande aide. Merci à elle également pour ses nombreux retours et conseils prodigués. Son expérience dans la didactique des mathématiques et ses cours dans ce domaine ont contribué à l'approfondissement de nos réflexions.

Nous remercions ensuite les membres du jury pour le temps consacré à la lecture et à l'évaluation de ce mémoire.

Merci aux professeurs André Hardy de l'Université de Namur et Karl Grosse-Erdmann de l'Université de Mons dans le choix des références du savoir-savant. Nous tenons également à remercier les enseignants du secondaire pour les supports de cours qu'ils nous ont partagés.

Un tout grand merci à l'ensemble de nos professeurs universitaires pour leur enseignement riche en termes d'apprentissage durant nos cinq années d'études et pour leur disponibilité.

Merci à nos maîtres de stages pour leurs encouragements, leurs conseils pertinents ainsi que la confiance qu'ils nous ont accordée au sein de leurs classes.

Nous tenons à remercier chaleureusement nos familles proches et plus précisément nos parents pour leur soutien, leurs encouragements. Leurs conseils, leur écoute et leurs nombreuses relectures nous ont été très bénéfiques. Nous souhaitons remercier particulièrement Pascal Job pour son expérience en informatique lors de la programmation du site Internet. Son expérience en mathématiques nous a également été utile lors de la réalisation de ce mémoire et durant nos études.

Enfin, nous remercions nos amis et colocataires qui nous ont aidés de près ou de loin dans la rédaction de ce mémoire.

Résumé

Les probabilités, variables aléatoires et lois de probabilité interviennent dans de nombreuses études supérieures (filières scientifiques ou non). En outre, elles occupent une place de plus en plus importante dans les référentiels et les programmes de l'enseignement secondaire. Les raisonnements probabilistes étant particuliers par rapport aux mathématiques classiques, les professeurs se retrouvent souvent démunis lors de l'enseignement des concepts et ne savent pas toujours comment les transmettre. L'objectif de ce mémoire consiste à mettre en évidence des obstacles et difficultés auxquels sont confrontés les enseignants et élèves au travers d'exercices. Pour ce faire, nous avons comparé deux types de savoirs dans le but de ressortir ces obstacles. Nous avons également commenté de manière détaillée la résolution des exercices et les raisonnements qui en découlent. Par ailleurs, afin de rendre accessible notre analyse à un plus grand nombre d'enseignants et que ces derniers prennent conscience de ces difficultés, nos perspectives sont de mettre en oeuvre un dispositif d'enseignement en ligne.

Mots-clés : probabilités, variables aléatoires, lois de probabilité, transposition didactique, comparaison entre deux savoirs, obstacles, difficultés, résolution et analyse d'exercices.

Abstract

Probability, random variables and laws of probability have become a real part of a wide range of higher education academic programmes (whether scientific or not). Furthermore, these topics occupy an increasingly important place in secondary education, both in teachers' course materials and in courses curricula. As probability reasoning is quite specific and different from classical mathematics, teachers often find themselves at a loss when teaching such concepts. As a matter of fact, having students understand and apply probability is often far from easy. The objective of this graduation thesis is to highlight the difficulties and obstacles faced by teachers and students by means of exercises. We have therefore compared two types of knowledge in order to identify these obstacles. In addition, we have commented the resolution of these exercises in details as well as the reasoning lying behind them. Furthermore, in order to make our analysis accessible to as many teachers as possible and to make them aware of these difficulties, we plan to implement an online teaching device

Keywords : probability, random variables, laws of probability, didactic transposition, comparing two skills, obstacles, difficulties, resolution and analysis of exercises.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est réalisé dans le cadre d'un Master en Sciences Mathématiques à finalité didactique, à l'Université de Namur. Il porte sur la transposition didactique des notions de variables aléatoires et lois de probabilité dans l'enseignement secondaire. Dans ce mémoire, nous visons principalement les obstacles et difficultés survenant à la suite de cette transposition et en lien avec le raisonnement probabiliste.

Nous nous sommes intéressés au domaine des probabilités puisqu'il prend une place grandissante dans les études secondaires et supérieures. De plus, nous rencontrons régulièrement des phénomènes aléatoires dans la vie courante. Nous devons donc constamment développer des modes de pensées en tenant compte d'évènements incertains. C'est pourquoi il est essentiel d'éveiller l'esprit probabiliste chez les apprenants. Pour ce faire, l'enseignant est confronté à la transposition didactique. Il doit en effet transformer les concepts dans le but de les rendre accessible à un public débutant.

Dans le premier chapitre, nous définissons la transposition didactique établie par Yves Chevallard. Nous précisons les différents types de savoirs en mathématiques et nous expliquons les mécanismes de transposition liés. Nous mettons également en évidence les acteurs impliqués. Pour clôturer ce chapitre, nous mettons en garde le lecteur sur des complications qui peuvent survenir de la transposition didactique.

Dans le deuxième chapitre, nous relevons d'une part les notions de probabilité, variables aléatoires et lois de probabilité inscrites dans les référentiels de l'enseignement secondaire en vis-à-vis de celles du savoir savant. Pour ce faire, nous avons consulté plusieurs références traitant ce savoir ainsi que des manuels scolaires. D'autre part, nous établissons des comparaisons entre le savoir savant et le savoir à enseigner par l'intermédiaire de remarques et constats.

Dans le troisième chapitre, nous identifions deux hypothèses concernant les difficultés de l'enseignement des notions de probabilité. La première hypothèse est déduite des comparaisons effectuées au chapitre précédent et concerne plus particulièrement un décalage entre le savoir savant et le savoir à enseigner. La seconde hypothèse porte sur une différence de raisonnement constatée dans le domaine des probabilités. Cette déduction est établie sur base d'obstacles et difficultés identifiés en regard de la théorie de Brousseau.

Dans le quatrième chapitre, nous mettons en exergue les obstacles et difficultés déterminés précédemment dans des exercices rencontrés en probabilité. Par la mise en scène de ces derniers, nous souhaitons que l'enseignant remarque et prenne conscience des obstacles et difficultés survenant lors de la résolution de problèmes de probabilité, variables aléatoires et lois de probabilité. A cette fin, nous avons pour perspective de rendre accessible notre analyse par l'intermédiaire d'un site Internet.

Mots des auteurs

Dans la réalisation de ce mémoire, je tiens à mettre en avant le travail collaboratif entre Mario et moi. En effet, du début à la fin de la rédaction de ce travail, nous nous sommes rencontrés chaque semaine dans le but de partager nos idées, confronter les références consultées, etc.

Concernant notre méthode de travail, nous avons choisi de nous donner des objectifs toutes les semaines (se documenter, rédiger une partie, relire, etc.). Pour la recherche de références, par exemple, chacun cherchait de son côté et lors de nos rencontres hebdomadaires, nous mettions en commun les informations pertinentes relevées. Ensuite, pour la semaine suivante, chacun lisait les documents trouvés par l'autre binôme afin de vérifier la pertinence et la compréhension des informations soulevées. De plus, lorsque l'un de nous deux écrivait une partie, l'autre la relisait et y ajoutait ses propres commentaires. Lors de nos rendez-vous suivants, nous reprenions, dès lors, les parties écrites et commentées et les reformulions ensemble afin d'obtenir un texte uniforme. C'est la raison pour laquelle il m'est difficile de ressortir des apports personnels à ce mémoire. J'ai vraiment l'impression que tout ce qui a été réalisé pour ce mémoire est vraiment le fruit d'un travail collaboratif, sans que l'on puisse dissocier la contribution personnelle de chacun. Toute la rédaction de ce mémoire a été réalisée en équipe du début à la fin. Lorsque l'un était en stage, l'autre travaillait plus. Nous avons, cependant, gardé notre entrevue de la semaine. La durée des stages de chacun étant équivalente, l'équilibre de la charge de travail se retrouvait. Je ne peux donc vraiment pas préciser la quote-part de l'un et de l'autre puisque ce mémoire est le fruit d'un réel travail d'équipe.

L'accomplissement de ce mémoire a vraiment été enrichissant car il m'a vraiment permis d'apprendre à collaborer. Durant nos études, nous avons souvent dû concevoir des travaux de groupe mais ce mémoire a demandé beaucoup plus de confrontations d'idées et de débats, il a donc été nécessaire de trouver des compromis. Se rencontrer chaque semaine pendant un an et demi nécessitait également de s'organiser, d'accorder nos horaires mais aussi une très bonne entente, surtout en période de crise sanitaire. Il a aussi été difficile, au début, de trouver une façon efficace de collaborer. De plus, puisque nous avons choisi de rédiger ensemble afin d'obtenir plus d'uniformité dans notre mémoire, il a fallu trouver une formulation de phrases qui convenait aux deux. Néanmoins, l'avantage de la rédaction en commun est que nous pouvions allier nos forces. En effet, je trouve que Mario possède un style bien meilleur que le mien, il m'a donc appris à utiliser des mots que je n'aurais jamais utilisés auparavant. En revanche, une de mes forces dans la rédaction est la relecture orthographique, je repère, en effet, assez vite les fautes d'orthographe. Je maitrise, également, mieux LaTeX que Mario alors que ce dernier m'a beaucoup aidée dans la compréhension de certaines références anglophones. Un avantage pour la recherche des différents obstacles du Chapitre 3 est que j'ai réalisé un stage sur les variables aléatoires et lois de probabilité, j'ai, ainsi, pu partager les difficultés rencontrées. En outre, Mario, qui n'avait pas revu cette UAA, a vraiment été placé dans la même situation qu'un élève et a pu, ainsi, être directement confronté à d'autres difficultés que les miennes. Nous avons donc dans ce mémoire vraiment pu profiter des forces de chacun.

Enfin, ce mémoire m'aura permis de vraiment travailler en équipe et de profiter, ainsi, des forces de Mario pour améliorer mes propres faiblesses. Il m'aura également aidé dans la gestion de l'organisation. La réalisation de ce travail a, par conséquent, été très enrichissante.

Stéphanie Job

Ce mémoire est le fruit de deux années de travail collaboratif entre Stéphanie et moi-même. Sur cette base, je pense qu'il est important de souligner à la fois les contraintes qui se sont imposées mais aussi les points forts que j'ai pu en retirer.

D'un point de vue organisationnel, nous avons pris un certain temps avant de définir la méthode de travail qui nous convenait le mieux et surtout celle qui était la plus productive et efficace. Initialement, nous ne savions pas comment nous y prendre, notamment lors de la rédaction de l'état de l'art et du descriptif. En effet, nous avons eu des difficultés à nous lancer dans une rédaction formelle étant donné les multiples idées qui nous parvenaient et qui parfois n'allaient pas dans le même sens. Nous avons alors pris conscience de l'importance de définir des objectifs communs pour éviter de partir dans des directions différentes et de trop s'éloigner de la problématique de départ. Par ailleurs, nous avons dû coordonner nos recherches, nos plannings ainsi que nos manières de procéder. En effet, un mémoire à deux signifie que chaque mot écrit par l'un soit validé par l'autre ou, dit autrement, que les idées développées par l'un coïncident avec celles de l'autre. Nous sommes alors parvenus à trouver des accords communs et à rédiger un texte bien fondé.

Pratiquement, nous nous sommes retrouvés chaque semaine via l'application Teams et parfois en présentiel lorsque le gouvernement nous le permettait. Cela était parfois compliqué lorsque nous étions en stage, mais le fait de travailler à deux nous motivait davantage. Tous les chapitres figurant dans ce mémoire ont donc été écrits par nos soins et non de manière individuelle. Pour ce faire, nous avons réalisé séparément des recherches dans la littérature, dans des cours du secondaire et universitaires. Nous avons synthétisé séparément ces ressources afin d'en ressortir les éléments clés et en lien avec notre thématique. C'est seulement dans un second temps que nous avons confronté nos idées et mis en parallèle nos références afin de vérifier leur pertinence. Nous nous sommes également aidés dans la compréhension de certaines notions complexes ou spécifiques. Nous avons alors progressivement écrit le texte de ce mémoire de sorte que les idées de chacun transparaissent le plus possible.

D'un point de vue plus personnel, j'ai remarqué ma tendance à écrire des phrases longues et Stéphanie m'a aidé à les raccourcir. Par ailleurs, elle était parfois plus sensible à l'orthographe et à la manière de concevoir les tableaux et graphiques dans LaTeX. Lorsque nous avons entamé le chapitre de résolution d'exercices, j'ai essayé de me placer principalement dans la peau de l'élève tandis que Stéphanie dans celle de l'enseignant. En effet, comme elle a eu l'occasion de donner l'UAA des variables aléatoires et lois de probabilités dans le cadre de ses stages, elle avait acquis déjà certains automatismes et rencontré des difficultés d'enseignement, tels que nous les avons décrits en fin de chapitre. Globalement, j'ai l'impression que nous nous sommes toujours complétés dans ce travail. A aucun moment je ne peux dire que j'y ai plus contribué qu'elle.

Finalement, je trouve que les démarches que nous avons entreprises dans le cadre de ce mémoire (prises de contact, méthodes d'organisation, mises en commun, partages d'idées, discussions autour du savoir en probabilité, etc.) rentrent pleinement dans les compétences qu'un enseignant doit pouvoir développer dans sa carrière professionnelle. Tant les apports liés à la didactique des mathématiques que la mise en projet autour de ce ceux-ci me seront bénéfiques et profitables à l'avenir.

Mario Borin

Chapitre 1

Transposition en didactique des mathématiques

L'apprentissage de nouveaux concepts, quelque soit le domaine d'étude, nécessite une transformation du savoir. Ce processus de transformation indispensable peut se réaliser consciemment ou, au contraire, de manière inconsciente. Prenons par exemple la définition d'un objet scientifique prélevée d'un syllabus de nos cours d'université. Si nous souhaitons la transmettre à l'un de nos proches, n'ayant pas suivi de formation dans ce domaine, nous sommes forcés d'employer d'autres termes ou de simplifier les expressions utilisées afin d'en assurer une bonne compréhension. Dans cette situation, nous avons pris conscience des modifications effectuées sur la définition initiale. Mais de manière plus générale, lorsqu'il nous arrive de formuler un résultat particulier, même si nous pensons être rigoureux dans la manière de nous exprimer, nous réadaptons très souvent ce résultat de manière inconsciente et propre à chacun. Cette adaptation inconsciente, expliquée dans [Perrenoud, 1998], peut intervenir dans d'autres disciplines comme c'est le cas notamment avec la pratique d'un sport où des mouvements paraissent automatiques.

L'objectif de ce chapitre est de comprendre les différents processus intervenant lors de la transposition de savoirs en mathématiques. Pour ce faire, nous avons consulté les sources [Bronckart et Plazaola Giger, 1998], [Mai Anh, 2018], [Xhonneux, 2013] et [Chevallard, 1982]. Grâce aux outils théoriques proposés par les auteurs de ces références, nous serons en mesure de mieux comprendre le système d'enseignement et les différents acteurs en jeu. Enfin, nous tenterons d'expliquer pourquoi certaines complications peuvent survenir lors de la transposition et de l'apprentissage d'une discipline. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous focaliserons dans un domaine particulier des mathématiques, à savoir celui des probabilités, variables aléatoires et lois de probabilité.

1.1 Transposition didactique et savoirs en mathématiques

Lorsqu'il s'agit de décrire ou de comprendre les liens existants entre les mathématiques rigoureuses de référence et celles étudiées dans les différents niveaux d'enseignement, nous devons nous intéresser à plusieurs formes de savoirs. En vue de décrire correctement les différents mécanismes impliqués, nous pouvons nous pencher sur la notion de transposition didactique. Celle-ci a été formalisée par Yves Chevallard, un didacticien français du XX^{e} siècle. L'idée de cette transposition est de séparer les mathématiques vues comme discipline appartenant à la communauté des scientifiques, de celles considérées comme une discipline d'apprentissage. L'objectif véhiculé derrière cette transposition est donc de proposer une forme d'adaptation du savoir de référence en une forme enseignable à un public qui n'appartient pas forcément à la sphère des mathématiciens. Un autre but est d'amener l'élève à être plus autonome dans l'apprentissage des concepts et de donner l'envie de découvrir de nouvelles notions. Chevallard parle du passage entre le savoir savant et le savoir enseigné.

1.1.1 Savoir savant

Le savoir savant en mathématiques est un savoir maintenu par la communauté des experts et savants dans ce domaine. Nous pouvons par exemple y retrouver certains paradoxes ou contradictions liés notamment à la formulation des propositions utilisées. Une certaine rigueur et des raisonnements basés sur l'intuition y prennent également place. Toutes ces caractéristiques font de ce savoir quelque chose de difficile à atteindre et à cerner pour un public non averti. Il est toutefois accessible dans la littérature par des références reconnues, des publications dans les revues scientifiques et grâce à des congrès organisés. Le savoir savant occupe une place importante dans les domaines de recherche en mathématiques et peut apparaitre de manière transversale dans d'autres disciplines telles que la physique, l'informatique, l'économie, etc. Au niveau de la société, ce savoir semble intouchable comme expliqué dans [Perrenoud, 1998]. En effet, il paraît n'avoir aucune incertitude. Or, c'est justement ce type de savoir qui va être sans cesse remis en question, contredit et actualisé. Il va susciter de nombreux débats entre scientifiques.

1.1.2 Savoir enseigné

Le savoir enseigné est celui qui est transmis aux élèves dans les différents établissements scolaires, qu'il s'agisse de la salle de classe en secondaire ou de l'auditoire dans l'enseignement supérieur. Il correspond au savoir savant qui a été modifié. Il s'agit donc, comme son nom l'indique, d'un savoir enseigné par des professeurs et dépend fortement de leur formation et de leur niveau de maitrise. D'autre part, en fonction de la vision des enseignants quant aux méthodes d'apprentissages, le savoir enseigné peut varier d'un établissement à l'autre. En effet, chaque enseignant développe des outils qui lui sont propres et permettant de faciliter l'apprentissage des notions. De plus, l'auteur de [Perrenoud, 1998] évoque que, contrairement au savoir savant, ce savoir n'est pas remis en question, il est accepté depuis des années : les mathématiques enseignées en secondaire sont pour l'essentiel validées au XVIII^{e} siècle. Par contre, en ce qui concerne la théorie des probabilités, même si le calcul des probabilités a été fondé au milieu du XVII^{e} siècle à l'occasion de jeux de hasard, elle constitue une exception. Elle a en effet pris sa place dans l'enseignement secondaire suite à la réforme de 1968. Selon [Noël, 1993], cette réforme a pour objectif l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire.

1.2 Types de transposition et acteurs en jeu

Entre le savoir savant et le savoir enseigné, nous retrouvons le savoir à enseigner. Celui-ci permet d'assurer la transition entre la transposition didactique dite externe et celle dite interne.

1.2.1 Savoir à enseigner

Le savoir à enseigner caractérise les différentes notions sélectionnées et retenues du savoir savant. Il s'agit en réalité d'écrits officiels permettant d'exposer les exigences minimales à enseigner. Nous le retrouvons donc dans les référentiels et programmes de cours, c'est-à-dire les supports sur lesquels se basent les enseignants pour concevoir leurs leçons.

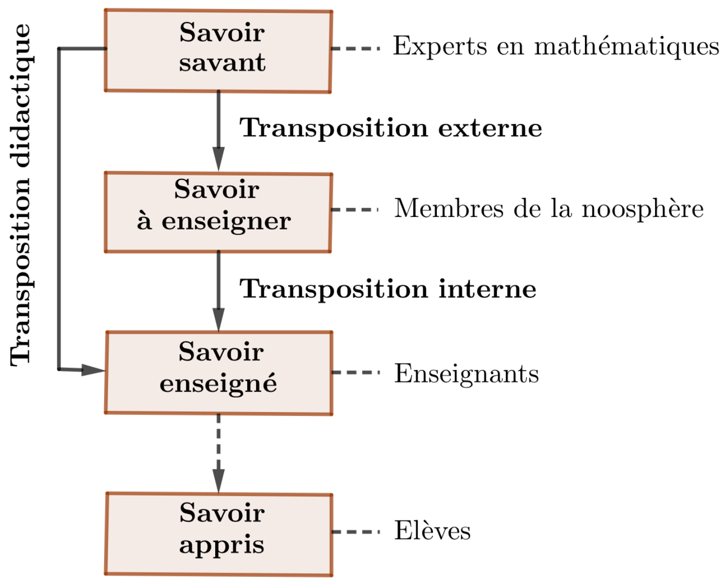


FIGURE 1.1 – Le processus de transposition didactique et les différents intervenants

Source: schéma inspiré de [Xhonneux, 2013]

1.2.2 De transposition externe à transposition interne

La Figure 1.1 nous permet d'illustrer la transposition didactique entre le savoir savant et le savoir enseigné. Nous y observons deux types de transposition : la transposition externe entre le savoir savant et le savoir à enseigner et la transposition interne permettant d'atteindre le savoir enseigné. Il existe toutefois une dernière forme de savoir, appelée savoir appris et correspondant plutôt au savoir acquis par les différents apprenants. L'objectif est que l'élève prenne conscience des concepts à approprier. Ce savoir est l'aboutissement de la transposition didactique.

Ces deux types de transposition sont rendues possibles grâce à la collaboration de plusieurs acteurs et personnes qualifiées. Chevallard propose de désigner par noosphère l'ensemble des acteurs jouant un rôle dans la transposition didactique externe. Parmi ces acteurs, certains font partie du système d'enseignement et d'autres de la société. Il fait donc référence aux personnes ayant une fonction particulière dans la production du savoir à enseigner : les savants, les instances politiques décisionnelles et exécutives, les collaborateurs didactiques à l'origine des manuels scolaires, les chercheurs en didactique, les parents, les associations enseignantes, les professeurs, etc. La noosphère permet de délimiter une zone dans laquelle se rencontrent différents points de vue : des idées se confrontent, sont débattues et murissent. Les enseignants peuvent appartenir à la noosphère tout en étant impliqués dans la diffusion du savoir enseigné.

Maintenant que nous avons défini le cadre et les différents intervenants dans la transposition didactique, nous pouvons décrire plus précisément les transpositions externe et interne. Le premier type, dit externe car il se réalise à l'extérieur du système d'enseignement, est pris en charge par les différents membres de la noosphère. Ceux-ci décident en effet de toutes les notions à enseigner et construisent dès lors les référentiels et programmes de cours. Pour ce faire, ils doivent tenir compte des transitions dues à un changement d'années ou de degrés. Ils doivent faire attention à ce que l'élève connait, a acquis précédemment et aux objectifs qu'il doit atteindre, aux concepts qu'il doit maitriser. Les membres de la noosphère doivent également tenir compte du type de filière. Cette transposition nécessite la prise en compte des exigences et valeurs sociétales, de la connaissance des nouvelles méthodes d'apprentissage, etc. Un autre rôle important de la transposition externe consiste à écarter les savoirs qui suscitent encore à l'heure actuelle des débats. Certains concepts du savoir savant étant encore en discussion, la transposition externe sélectionne uniquement ceux validés par la communauté scientifique. C'est d'ailleurs pour cette raison que les probabilités ne font leur entrée dans l'enseignement secondaire que dans les années septante. Elles ne possédaient pas encore assez de fondements théoriques solides avant l'apparition des axiomes de Kolmogorov.

La deuxième transposition, interne, caractérise plutôt la réadaptation et la transformation du savoir à enseigner par les enseignants. Ces derniers développent alors des outils pédagogiques dans le but de faciliter la transmission des concepts aux étudiants. Ils adaptent les savoirs au public auquel ils s'adressent et à son environnement. Autrement dit, ils tiennent compte du parcours de l'élève (orientation et intérêts des étudiants, société actuelle, etc.) et de divers éléments psychologiques et cognitifs.

Ces deux types de transposition se réalisent distinctement dans l'enseignement secondaire belge. Il est intéressant de remarquer que les cours donnés dans l'enseignement supérieur et plus particulièrement à l'université constituent également une forme de transposition didactique. Dans le domaine universitaire, les professeurs en charge de cours ne sont pas contraints de suivre des programmes officiels qui seraient communs à toutes les universités. Ils peuvent en effet choisir les concepts et matières à enseigner, ce qui n'est pas le cas pour les enseignants dans le secondaire. Cependant, à l'heure actuelle, un accord sur le programme d'étude existe entre les différentes universités francophones. Ces dernières doivent proposer un certain nombre d'intitulés de cours dans plusieurs domaines de la discipline.

1.3 Complications intervenant lors de la transposition didactique

Lors du processus de transposition didactique, Chevallard considère que la réduction et la modification des contenus du savoir savant sont incontournables. Il est en effet nécessaire de passer par des procédés de simplification et d'adaptation des notions à enseigner, en vue de faciliter leur enseignement et de les rendre plus accessibles. Ces procédés peuvent consister plus particulièrement à oublier de mentionner les noms des savants à l'origine des objets mathématiques étudiés. Les mécanismes consistant à décontextualiser les concepts puis ensuite à les recontextualiser différemment peuvent également créer un écart entre le savoir savant et le savoir enseigné. Les objets mathématiques de départ subissent donc des transformations impliquant une distanciation avec les notions finalement enseignées dans les établissements scolaires. Les professeurs disposent en quelque sorte d'un savoir déjà modifié et difficile à rattacher au savoir de référence et rigoureux. Ces transformations du savoir savant peuvent par ailleurs entraîner des erreurs. Il y a donc un danger de trop s'écarter du savoir de départ. A l'inverse, il est important de garder une certaine distance afin que ce savoir reste accessible à tous. Dès lors, afin de réduire l'écart entre les savoirs, les personnes participant à la transposition didactique interne doivent constamment se poser la question « comment transposer ? » au lieu de « que transposer ? ».

Afin de déterminer les éventuelles mauvaises transformations du savoir savant et de comprendre les difficultés pouvant apparaitre lors de l'apprentissage des variables aléatoires et lois de probabilité, nous allons comparer les notions intervenant dans le savoir savant et celles figurant dans les référentiels de l'enseignement secondaire. De cette manière, nous serons en mesure d'identifier les différents processus de transposition qui ont été appliqués.

Chapitre 2

Comparaisons des notions de probabilité abordées dans le savoir savant et dans le savoir à enseigner

Le but principal poursuivi au cours de ce chapitre est d'identifier les notions [1] de probabilité apparaissant dans le savoir savant et celles du savoir à enseigner, de manière à pouvoir établir des comparaisons et d'identifier les procédés de transposition. Ce chapitre fait donc office d'état de l'art, en reprenant les définitions et propriétés mentionnées dans les référentiels de l'enseignement secondaire ainsi que celles du savoir savant.

2.1 Présentation générale des notions de probabilité

Cette première section permet d'identifier précisément les différentes notions de probabilité et celles relatives aux lois de probabilité et variables aléatoires, figurant dans le savoir savant et dans le savoir à enseigner. Pour ce faire, nous avons parcouru les référentiels de l'enseignement secondaire [Ministère de la Communauté française, 2014], dans lesquels nous nous sommes particulièrement intéressés au cours de mathématiques s'étendant sur deux et quatre périodes par semaine. D'autre part, nous avons analysé les tables des matières des références [Borovkov, 2003], [Foata et Fuchs, 1998], [Grimmett et Stirzaker, 2001], [Jacob et Protter, 2003] et [Ross, 2014] pour repérer les notions du savoir savant en probabilité. Nous nous sommes rendu compte que la plupart de ces références correspondent à des notes de cours retranscrites et qu'il est donc difficile d'atteindre le savoir à la source en tant que tel. Nous avons suivi principalement la structure de [Ross, 2014] car les professeurs d'université que nous avons contactés, André Hardy de l'université de Namur et Karl Grosse-Erdmann de l'université de Mons, nous l'ont renseignée. Les autres références mentionnées ci-dessus permettent de compléter le contenu du savoir savant.

Les tableaux figurant aux pages suivantes reprennent les principales notions sur lesquelles nous discuterons dans le cadre de ce mémoire. Nous les avons séparées en deux colonnes distinctes dont la première fait part des notions du savoir savant et la seconde celles du savoir à enseigner. Nous avons également ajouté une troisième colonne permettant d'établir des premiers constats. En parcourant en vis-à-vis les deux premières colonnes, le lecteur peut directement identifier la sélection des notions provenant du savoir savant lors de la conception des référentiels. Il est important de remarquer que nous n'avons pas suivi la chronologie des notions

1. Nous ne ferons pas de distinctions particulières entre les termes « notion » et « concept » même si de manière rigoureuse, il est préférable de parler de « notion » lorsque l'approche est moins formalisée ou moins précise.

trouvées dans les références que nous avons consultées. Autrement dit, leur ordre d'apparition n'est pas forcément similaire à celui figurant dans les tables des matières des livres de référence. D'autre part, les croix indiquent que le concept n'a pas été étudié dans le type de savoir associé.

<table>
<tr><th colspan="3">Probabilités</th></tr>
<tr><th>Notions du savoir savant</th><th>Notions du savoir à enseigner</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr><td>Analyse combinatoire
— Principe fondamental de dénombrement
— Permutations
— Arrangements
— Combinaisons
— Coefficients multinomiaux
— Répartition de boules dans des urnes</td><td>Analyse combinatoire
— Arrangements avec et sans répétition
— Combinaisons sans répétition
— Permutations avec et sans répétition</td><td>Au niveau de l'analyse combinatoire, les coefficients multinomiaux (combinaisons avec répétitions) ne se retrouvent pas dans le savoir à enseigner.</td></tr>
<tr><td>Ensemble fondamental et évènement</td><td>Expérience aléatoire, catégorie d'épreuve, évènement, cardinal d'un évènement</td><td>Il existe une différence d'appellation pour les termes ensemble fondamental et catégorie d'épreuve. De plus, le cardinal d'un évènement est abordé au niveau des probabilités dans le savoir à enseigner.</td></tr>
<tr><td>— Axiomes des probabilités
— Algèbre et tribu</td><td>Probabilité d'un évènement</td><td></td></tr>
<tr><td>— Quelques théorèmes élémentaires
— Ensembles fondamentaux à évènements élémentaires équiprobables</td><td>Propriétés des probabilités</td><td>Seules les propriétés de base sont abordées dans le savoir à enseigner.</td></tr>
<tr><td>Probabilité en tant que mesure du crédit accordé à un fait</td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>Probabilité conditionnelle</td><td>Probabilité conditionnelle</td><td></td></tr>
<tr><td>Formule de Bayes</td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>Evènements indépendants</td><td>Evènements indépendants</td><td></td></tr>
<tr><td>Fonction de probabilité conditionnelle</td><td>×</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Variables aléatoires et lois de probabilité</th></tr>
<tr><th>Notions du savoir savant</th><th>Notions du savoir à enseigner</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr><td>Variables aléatoires
— Variables aléatoires
— Fonction de répartition
— Espérance
— Espérance d’une fonction d’une variable aléatoire
— Variance
— Fonction réciproque
— Fonction mesurable
— Tribu engendrée par une variable aléatoire</td><td>Variables aléatoires
— Espérance mathématique
— Ecart-type
— Distribution de probabilité
— Fonction de répartition</td><td>Les trois derniers points du savoir savant sont des éléments issus de la théorie de la mesure et de l’intégration. Ils ne sont pas abordés dans le savoir à enseigner.</td></tr>
<tr><td>Variables aléatoires discrètes
— Variables aléatoires discrètes
— Variable de Bernoulli et variable binomiale
— Variable aléatoire de Poisson
— Autres lois discrètes
— Fonction de masse et discontinuités de la fonction de répartition</td><td>Loi binomiale
— Epreuve et schéma de Bernoulli
— Espérance mathématique et écart-type
— Distribution de probabilité
Loi uniforme
— Espérance mathématique et écart-type</td><td>Dans le cas discret, seules les lois de Bernoulli, binomiale et uniforme sont étudiées dans le savoir à enseigner.</td></tr>
<tr><td>Variables aléatoires continues
— Variables aléatoires continues
— Espérance et variance de variables aléatoires continues
— Variable aléatoire uniforme
— Variable aléatoire normale
— Variable aléatoire exponentielle
— Autres distributions continues
— Distribution d’une fonction de variable aléatoire</td><td>Loi uniforme
— Espérance mathématique et écart-type
Loi normale
— Espérance mathématique et écart-type
— Graphique de la distribution de probabilité</td><td>Dans le cas continu, seules les lois uniforme et normale sont vues dans le savoir à enseigner.</td></tr>
<tr><td>Variables aléatoires simultanées</td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>Propriétés de l’espérance</td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>Théorèmes limites</td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>Table de la loi normale</td><td>Table de la loi normale et outil informatique</td><td></td></tr>
</table>

Nous pouvons remarquer que le savoir savant considère l'espace probabilisé comme un cas particulier d'espace mesuré, dans lequel une mesure de probabilité a été définie. Cela se remarque en effet par l'apport de concepts provenant de la théorie de la mesure et de l'intégration, alors que le savoir à enseigner emploie directement des termes probabilistes sans forcément évoquer les notions de mesure, de σ-algèbre ou encore de fonction mesurable. D'autre part, le savoir savant envisage un plus large éventail de propriétés et de cas à envisager. Il y décrit notamment les variables simultanées, ou encore les propriétés relatives à la notion d'espérance, alors que le savoir à enseigner n'en parle pas. Différents résultats basés sur des notions de limites ou plus généralement des théorèmes limites sont également développés dans le savoir savant. Nous avons de plus observé que plusieurs techniques et outils sont détaillés dans le savoir à enseigner mais nous ne les avons pas retrouvés dans le savoir savant relatif à ces chapitres. C'est le cas par exemple avec les arbres, les diagrammes de Venn et les tableaux. Cependant, ils occupent malgré tout une place importante dans les référentiels [Ministère de la Communauté française, 2014].

Maintenant que nous avons dressé la liste des notions de probabilité présentes dans le savoir savant et dans le savoir à enseigner, nous pouvons décrire les différents résultats qui y sont associés de façon à pouvoir en établir des comparaisons.

2.2 Comparaisons entre les notions de probabilité

Cette section se veut à la fois descriptive et comparative car elle reprend les définitions, les propriétés, les théorèmes et les formules que nous avons pu retrouver dans le savoir savant et dans le savoir à enseigner. Ensuite, sur base de la formulation de ces résultats, nous proposons des comparaisons entre les deux types de savoir. En ce qui concerne les notions du savoir à enseigner, celles-ci proviennent des référentiels [Ministère de la Communauté française, 2014] et des manuels scolaires Espace Math, [Adam et Lousberg, 2012], et de deux versions de CQFD, [Van Eerdenbrugghe et Bousson, 2011] et [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]. Concernant à présent les notions du savoir savant, celles-ci ont été prélevées dans les références déjà mentionnées : [Borovkov, 2003], [Foata et Fuchs, 1998], [Grimmett et Stirzaker, 2001], [Jacob et Protter, 2003] et [Ross, 2014].

Nous nous sommes tout d'abord focalisés sur les notions de probabilité et ensuite sur celles associées aux variables aléatoires et lois de probabilité. Par rapport aux référentiels, nous nous sommes arrêtés aux cours de mathématiques à deux et quatre périodes. La présentation des résultats qui suivent est à chaque fois divisée en deux parties, avec tout d'abord toutes les notions relatives au savoir savant et ensuite, tout ce qui fait référence au savoir à enseigner. L'ensemble de nos remarques, constats et comparaisons apparaissent de manière continue dans le texte et en fin de thématiques, l'objectif étant que le lecteur puisse réagir directement à la suite de la lecture des résultats.

2.2.1 Probabilités

Commençons par définir les concepts de base et énoncer les propriétés fondamentales nécessaires à la construction de l'espace des probabilités. Dans la suite, n, j et k sont considérés comme des naturels.

2.2.1.1 Expérience aléatoire, catégorie d'épreuve, évènements

Savoir savant

Les probabilités sont introduites dans le savoir savant par trois concepts nécessaires à la compréhension du langage probabiliste.

Dans [Grimmett et Stirzaker, 2001], les auteurs introduisent le terme *expérience aléatoire* par une expression courante de la société : « la chance de A est p ». Ils définissent en guise d'exemple l'évènement A par « le soleil se lèvera demain » et une quantité p par un huitième. Ces deux scientifiques précisent que

> *« la réalisation de A dépend d'une chaîne de circonstances. Cette chaîne est appelée expérience ou essai ; le résultat d'une expérience est appelé issue. En général, nous ne pouvons prédire avec certitude l'issue d'une expérience à l'avance ; nous pouvons seulement lister la classe des issues possibles. »* (traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001])

Geoffrey R. Grimmett et David R. Stirzaker définissent ensuite l'espace d'échantillonnage d'une expérience aléatoire.

Définition 2.2.1 (Espace d'échantillonnage) traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]
L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience est appelé l'espace d'échantillonnage et est noté par Ω.

La notion d'espace d'échantillonnage est plutôt désignée par ensemble fondamental dans [Ross, 2014]. Un évènement est également défini comme suit.

Définition 2.2.2 (Evènement) [Ross, 2014]
Tout sous-ensemble E de l'ensemble fondamental est appelé ***évènement****. Un évènement est donc un ensemble correspondant à divers résultats possibles de l'expérience. Si un résultat de l'expérience est compris dans E, on dit que E est réalisé.*

Ces trois notions du savoir savant font référence à la théorie des ensembles. Dans les sources consultées, plusieurs résultats mettant en évidence des opérations entre évènements sont rappelés. Toutes les propriétés d'intersection, d'union ou encore de différence finie et de complémentarité sont applicables. Néanmoins, un langage propre aux probabilités est utilisé. Par exemple, le concept d'évènement élémentaire est plutôt utilisé en probabilité pour désigner un ensemble composé d'un seul élément, c'est-à-dire un singleton dans le langage ensembliste.

Savoir à enseigner

Nous allons maintenant présenter ces notions comme elles sont abordées dans le savoir à enseigner.

Définition 2.2.3 (Expérience aléatoire) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*Une **expérience aléatoire** est une expérience*

— *que l'on peut répéter à volonté dans des conditions identiques,*
— *dont on peut identifier, avant l'expérience, l'ensemble de tous les résultats possibles,*
— *dont on ne peut prédire avec certitude le résultat qui est dû au hasard.*

Définition 2.2.4 (Catégorie d'épreuve) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **catégorie d'épreuve(s)** et noté* Ω.

Dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018], les auteurs définissent une issue par

> *« le résultat observé d'une expérience aléatoire. »*

La notion de catégorie d'épreuve du savoir à enseigner correspond à celle d'espace d'échantillonnage ou d'ensemble fondamental définie dans le savoir savant.

Définition 2.2.5 (Evènement) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*Un **évènement** est une partie des résultats, généralement exprimé par une proposition ; c'est un sous-ensemble de* Ω.

En général, un évènement est symbolisé par une lettre majuscule mais il peut être aussi exprimé directement au moyen d'une proposition. Contrairement au savoir savant, le cardinal d'un évènement est défini dans le chapitre des probabilités.

Définition 2.2.6 (Cardinal d'un évènement) [Adam et Lousberg, 2012]
Le nombre d'épreuves ou de résultats d'un évènement A *est le nombre d'éléments de* A*. On le note* $\#A$ *et on le lit **cardinal de A**.*

Les notions d'évènements élémentaires, impossibles, certains et contraires sont définies explicitement dans le savoir à enseigner.

Définition 2.2.7 (Evènement élémentaire) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*Un évènement qui n'est composé que d'un seul résultat est un **évènement élémentaire**.*

Définition 2.2.8 (Evènement impossible) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*Un évènement est dit réalisé lorsque l'issue de l'expérience appartient à l'évènement. Un évènement qui ne se réalisera jamais est un **évènement impossible**.*

Définition 2.2.9 (Evènement certain) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*Un évènement qui se réalisera toujours est un **évènement certain**.*

Définition 2.2.10 (Evènements contraires) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*Deux évènements qui se partagent tous les résultats possibles d'une même expérience aléatoire sont appelés **évènements contraires**.*

Dans le savoir à enseigner, l'évènement contraire de A est noté par $\overline{A}$. Les auteurs de [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] ajoutent que

> *« l'évènement* A *est réalisé si et seulement si* $\overline{A}$ *ne l'est pas. »*

Au moment de définir la notion d'évènement, un lien est établi avec les concepts d'union et d'intersection d'ensembles. Il s'agit d'une manière de définir des opérations sur les ensembles.

Définition 2.2.11 (Opérations sur les évènements) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
L'évènement (A *ou* B)*, noté aussi* ($A \cup B$)*, est l'évènement qui se réalise si et seulement si* A *ou* B *ou les deux se réalisent.*
L'évènement (A *et* B)*, noté aussi* ($A \cap B$)*, est l'évènement qui se réalise si et seulement si* A *et* B *se réalisent simultanément.*

Définition 2.2.12 (Evènements incompatibles) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
Deux évènements A *et* B *sont* ***incompatibles*** *s'ils ne peuvent se réaliser simultanément ; l'évènement* (A *et* B) *est alors impossible.*

Commentaires

En ce qui concerne les notions d'expérience aléatoire, de catégorie d'épreuve et d'évènement, certains points peuvent être relevés.

- Plusieurs termes existent pour désigner Ω : catégorie d'épreuve dans le savoir à enseigner et espace d'échantillonnage ou ensemble fondamental dans le savoir savant. De plus, en fonction des manuels scolaires consultés, un résultat possible d'une expérience aléatoire peut apparaitre sous les noms « issue » et « épreuve ».
- La notion d'évènements complémentaires est plutôt désignée par évènements contraires dans le savoir à enseigner. De plus, trois notations différentes apparaissent : $\overline{A}$ et $\Omega \backslash A$ dans le savoir à enseigner et A^c dans le savoir savant.
- Dans les références du savoir savant que nous avons consultées, la définition d'expérience aléatoire n'est pas explicite. Elle est parfois introduite au moyen d'une situation rencontrée au quotidien et où le hasard intervient.

2.2.1.2 Probabilité d'un évènement

Savoir savant

Nous avons repéré dans le savoir savant que la probabilité peut se définir au sein de deux courants : le courant objectiviste et le courant subjectiviste. Le premier courant est le seul développé dans les références que nous avons consultées tandis que le deuxième est à peine abordé et apparait plutôt sous forme de remarques. Dans ce dernier, la probabilité est définie comme un degré d'incertitude. Les notions d'aléatoire et de hasard deviennent dans ce cas des concepts propres à chaque individu. Le fait de répéter dans les mêmes conditions une expérience aléatoire n'est pas déterminant pour donner un sens à la probabilité. Le calcul des probabilités se base donc essentiellement sur nos connaissances à priori des phénomènes. Nous pouvons lire dans [Batanero *et al.*, 2005] que cette vision subjective élargit le champ des applications de la théorie des probabilités, notamment dans des décisions économiques et politiques.

Comme le courant objectiviste prédomine dans le savoir savant et dans nos cours universitaires, nous développerons uniquement celui-ci dans la suite de notre mémoire. Dans ce cas, la probabilité est définie suivant deux approches. La première consiste en l'approche fréquentiste qui caractérise la probabilité d'un évènement par la *fréquence théorique* ou *fréquence limite* de celui-ci. La deuxième approche est quant à elle une approche axiomatique, c'est-à-dire basée sur les trois axiomes de Kolmogorov. Pour essayer de comprendre la première vision, il est nécessaire de réaliser une expérience aléatoire dans les mêmes conditions un très grand nombre de fois.

Définition 2.2.13 (Probabilité sous l'approche fréquentiste) [Ross, 2014]
On suppose qu'une expérience d'ensemble fondamental S *est exécutée plusieurs fois sous les*

mêmes conditions. Pour chaque évènement E de S on définit $n(E)$ comme le nombre de fois où l'évènement E survient lors des n premières répétitions de l'expérience. Alors $P(E)$, la probabilité de l'évènement E, est définie par

$$P(E) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(E)}{n}.$$

C'est par le calcul du ratio intervenant dans cette définition que la notion de fréquence apparait. Il s'agit en effet de calculer un rapport entre le nombre de fois où l'expérience a contribué à la réalisation de l'évènement E et le nombre total de répétitions de l'expérience aléatoire. Le mathématicien dans [Ross, 2014] nous fait remarquer qu'il faut être vigilant avec cette définition. Même si elle paraît convenable, rien ne nous assure que $n(E)$ va tendre vers une limite constante qui sera exactement la même pour chaque série de répétitions de l'expérience. En effet, il se peut que notre intuition nous fasse défaut. Ross précise qu'

> *« admettre que $n(E)/n$ va nécessairement converger vers une certaine valeur fixe semble être une hypothèse très complexe. »* [Ross, 2014]

C'est pourquoi il semble préférable de passer par la deuxième approche.

En ce qui concerne la deuxième approche, les axiomes de Kolmogorov apparaissent dans la définition de mesure de probabilité. Cette approche est plus traditionnelle car elle repose sur des résultats démontrables et observables. Dans le savoir savant, la notion de σ-algèbre est avant tout définie.

Définition 2.2.14 (σ-algèbre) traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]
Une classe $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω est appelée un σ-algèbre si elle satisfait les conditions suivantes :

(a) si $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(b) si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$;

(c) si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$.

Il est fréquent de voir le terme tribu pour désigner une σ-algèbre. Le point (b) de cette définition représente la stabilité par réunion dénombrable et le point (c) est le passage au complémentaire.

Définition 2.2.15 (Mesure de probabilité) traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]
Une mesure de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une fonction $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ satisfaisant

(a) $P(\emptyset) = 0;\ P(\Omega) = 1$;

(b) si $A_1, A_2, ...$ est une classe de membres disjoints de $\mathcal{F}$, telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour toutes paires i, j satisfaisant $i \neq j$, alors

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Le dernier axiome de Kolmogorov est appelé axiome de σ-additivité. En ajoutant la notion de mesure de probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, le savoir savant atteint la notion d'espace probabilisé, noté $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Dans [Ross, 2014], l'auteur définit la probabilité d'un évènement ainsi que les axiomes de Kolmogorov sans faire intervenir les concepts de σ-algèbre et de mesure.

Définition 2.2.16 (Probabilité d'un évènement et axiomes) [Ross, 2014]
Considérons une expérience dont l'ensemble fondamental est S. Pour chaque évènement E de l'espace S nous admettons qu'un nombre $P(E)$ existe et satisfait aux trois axiomes suivants :
Axiome 2.1

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Axiome 2.2

$$P(S) = 1.$$

Axiome 2.3
Pour chaque séquence d'évènements mutuellement exclusifs $E_1, E_2, ...$ (c'est-à-dire d'évènements pour lesquels $E_iE_j = \emptyset$ si $i \neq j$).

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i).$$

$P(E)$ est appelé la probabilité de l'évènement E.

Savoir à enseigner

Pour commencer, définissons la notion de probabilité.

Définition 2.2.17 (Probabilité) [Adam et Lousberg, 2012]
La ***probabilité*** *est une science qui veut mesurer "le nombre de chances" qu'un évènement d'un phénomène fortuit se produise.*

Il est intéressant de préciser que le terme "phénomène fortuit" est une autre façon pour désigner une expérience aléatoire.

Dans les manuels scolaires, l'approche fréquentiste apparait au moyen de la loi des grands nombres. Même si cette dernière n'est pas définie en tant que notion, elle intervient souvent en guise d'introduction ou au travers d'une mise en situation. L'objectif est de transmettre la notion de limite qui intervient derrière cette approche. Autrement dit, l'étudiant est amené à découvrir que la fréquence d'apparition d'un résultat se rapproche et se stabilise autour d'une valeur et cela n'apparait que lorsqu'on répète l'expérience aléatoire un nombre de fois suffisamment grand. Dans ce cas, les auteurs de [Van Eerdenbrugghe et Bousson, 2011] et de [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] parlent de probabilité à postériori ou de probabilité expérimentale car nous en déduisons une valeur de probabilité sur base de l'expérimentation.

L'approche axiomatique est plutôt abordée par l'observation de certaines symétries ou similarités dans les problèmes rencontrés. Par exemple, l'étudiant est amené à remarquer que si un dé équilibré possède six faces, alors la probabilité de tomber sur chacune des faces est d'un sixième, sans passer par l'expérimentation du lancer de dé. Dans [Van Eerdenbrugghe et Bousson, 2011] et [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018], les auteurs parlent alors de probabilité à priori et basée sur l'intuition. En ce qui concerne les axiomes de Kolmogorov, ceux-ci sont plutôt abordés comme des propriétés fondamentales des probabilités.

Axiomes 2.2.1 (Propriétes des probabilités) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
Soient A et B deux évènements associés à une même expérience aléatoire.

1. *La probabilité d'un évènement élémentaire est toujours comprise entre* 0 *et* 1.

2. *La probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des évènements élémentaires associés aux résultats qui le composent.*
3. *La probabilité de tout évènement A est toujours comprises entre* 0 *et* 1.
   $0 \leq P(A) \leq 1$.
4. *La somme des probabilités des évènements élémentaires est égale à* 1.

Plusieurs propriétés découlent de ces résultats fondamentaux. Nous les aborderons dans la Section 2.2.1.3. La définition qui suit et proposée par les auteurs de [Adam et Lousberg, 2012] aborde différemment les axiomes de Kolmogorov.

Définition 2.2.18 (Loi de probabilité et probabilité) [Adam et Lousberg, 2012]
*Une **loi de probabilité** est une fonction P qui, à chaque évènement, associe un nombre compris entre* 0 *et* 1*, nommé **probabilité** de cet évènement, de sorte que*

$$\left| \begin{array}{l} P(\Omega) = 1; \\ P(\emptyset) = 0; \\ \textit{si } A \cap B = \emptyset, \ \textit{alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B). \end{array} \right.$$

Commentaires

Suite aux résultats associées à la notion de probabilité d'évènements, nous avons remarqué des nuances d'abstraction et des liens établis avec le domaine des statistiques.

- Il est intéressant de souligner qu'en secondaire il est difficile de passer par la définition de tribu car cela nécessite un degré d'abstraction trop élevé et surtout une gestion de la notion de classes qui correspond en réalité à des ensembles d'ensembles. En effet, les élèves devraient comprendre qu'un ensemble est à une classe, ce qu'un élément est à un ensemble. Or, seules les notions d'union, d'intersection et de différence entre ensembles sont abordées dans l'enseignement secondaire.
- Au niveau des axiomes de Kolmogorov, ils sont énoncés dans le savoir à enseigner mais de manière moins formelle. Nous avons remarqué que dans le manuel CQFD [Van Eerdenbrugghe et Bousson, 2011], ils sont comparés aux notions de fréquences vues en statistiques. Par exemple, des liens sont établis entre le fait qu'une fréquence est toujours comprise entre 0% et 100% de la même manière qu'une probabilité est une valeur entre 0 et 1. Par contre, dans le manuel Espace Math [Adam et Lousberg, 2012], les axiomes sont exprimés plus formellement mais aucun lien avec les fréquences n'est établi. D'autre part et de manière générale, les définitions sont souvent énoncées sur base de deux évènements. Nous pensons que d'un point de vue visuel, cette façon de définir est plus accessible. Le troisième axiome est par exemple basé sur la probabilité de l'union entre les évènements A et B et non celle d'une suite quelconque d'évènements comme c'est le cas dans le savoir savant.
- Les deux approches fréquentiste et axiomatique sont abordées dans les deux types de savoir. Néanmoins, une réflexion supplémentaire quant à l'existence de la probabilité dans le cas fréquentiste est posée dans le savoir savant. Il s'agit de faire intervenir la notion de convergence en probabilité d'une fréquence.

2.2.1.3 Propriétés des probabilités

Savoir savant

La plupart des propriétés de probabilité énoncées dans le savoir savant y sont également démontrées. Celles-ci se basent essentiellement sur la gestion des notions ensemblistes et reposent pour certaines sur des représentations comme celle proposée à la Figure 2.1. Cette dernière met en avant une propriété de complémentarité à partir d'un évènement quelconque A de l'espace d'échantillonnage Ω.

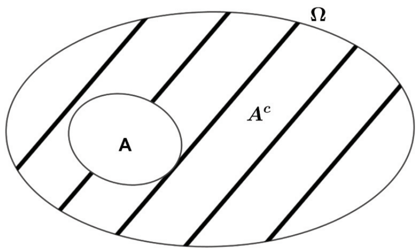


FIGURE 2.1 – Illustration d'ensembles complémentaires

Source: [Hardy, 2020a]

Lemme 2.2.1 traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]

(a) $P(A^c) = 1 - P(A)$,
(b) si $B \supseteq A$ *alors* $P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geq P(A)$,
(c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
(d) plus généralement, si $A_1, A_2, ..., A_n$ *sont des évènements, alors*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

où, par exemple, $\sum_{i<j}$ *additionne toutes les paires non ordonnées* (i, j) *avec* $i \neq j$.

Le dernier point du lemme est appelé formule de Poincaré. Un autre lemme abordant le concept de croissance d'une suite est également énoncé.

Lemme 2.2.2 traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]
Soient $A_1, A_2, ...$ *une suite croissante d'évènements, telle que* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$, *et nous écrivons* A *leur limite :*

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{i \to \infty} A_i.$$

Alors $P(A) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.

Similairement, si $B_1, B_2, ...$ *est une suite décroissante d'évènements, telle que* $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq ...$, *alors*

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \lim_{i \to \infty} B_i$$

satisfait $P(B) = \lim_{i \to \infty} P(B_i)$.

Ce deuxième lemme montre que P est une fonction continue d'ensembles. L'auteur de [Ross, 2014] le nomme théorème du passage à la limite et évoque des résultats faisant également référence à la croissance de suites.

Théorème 2.2.1 [Ross, 2014]
Si $\{E_n, n \geq 1\}$ est une suite soit croissante, soit décroissante d'évènements, alors

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n).$$

Propriété 2.2.1 (Monotonie - Inégalité de Boole) [Foata et Fuchs, 1998]
Pour toute suite d'évènements (A_n) $(n = 1, 2, ...)$, on a :

$$P(\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Certaines propriétés intervenant dans le savoir savant font référence à la notion d'équiprobabilité. Cette dernière n'étant pas définie de manière explicite dans les références du savoir savant parcourues, nous avons consulté le cours de probabilités discrètes [Hardy, 2020a].

Définition 2.2.19 (Evènements équiprobables) [Hardy, 2020a]
Si $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ où n est fini et que chaque évènement élémentaire porte la même probabilité, c'est-à-dire $\forall w_i \in \Omega$, $P(\{\omega_i\}_{i=1}^n) = p$, alors ces évènements sont caractérisés d'équiprobables.

La notion de mesure de probabilités discrètes est nécessaire afin de définir celle d'équirépartition sur des espaces finis.

Définition 2.2.20 (Mesures de probabilité discrètes) [Foata et Fuchs, 1998]
Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et ω_0 un élément de Ω ; on appelle mesure de probabilité singulière en ω_0 la mesure de probabilité, notée ϵ_{ω_0}, qui, à tout évènement A, fait correspondre la valeur :

$$\epsilon_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1, & si\ \omega_0 \in A; \\ 0, & si\ \omega \notin A. \end{cases}$$

On dit encore que la masse unité est concentrée en ω_0. La mesure ϵ_{ω_0} est aussi appelée mesure de Dirac en ω_0.

Définition 2.2.21 (Equirépartition sur les espaces finis) [Foata et Fuchs, 1998]
Soient N un entier strictement positif et $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ un ensemble fini. L'équirépartition sur Ω est définie comme la mesure de probabilité :

$$P = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} \epsilon_{\omega_n} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \epsilon_{\omega_n}.$$

En particulier, $P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{N}$ pour tout $n = 1, 2, ..., N$. En désignant par card A le cardinal de l'ensemble A, on a, de plus, la formule :

$$P(A) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \epsilon_{\omega_n}(A) = \frac{\sum_{\omega_n \in A} 1}{\sum_{\omega_n \in \Omega} 1},$$

d'où

$$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega}.$$

Cette dernière formule correspond à la définition de probabilité d'un évènement proposée par Laplace. Ce dernier définit donc la probabilité d'un évènement A comme le rapport entre le nombre de cas favorable à A et le nombre de cas possibles.

Savoir à enseigner

La plupart des propriétés intervenant dans le savoir à enseigner ne sont que des conséquences des axiomes de Kolmogorov. Celles-ci ne correspondent donc qu'aux propriétés élémentaires et font intervenir uniquement les notions d'union, d'intersection et de différence entre ensembles.

Le concept d'indépendance de deux évènements est tout d'abord énoncé dans le savoir à enseigner.

Propriété 2.2.2 (Indépendance de deux évènements) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
Deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de la réalisation de l'autre.

Propriété 2.2.3 [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

1. *La probabilité d'un évènement impossible est nulle.*

$$A \textit{ impossible } \Leftrightarrow P(A) = 0.$$

2. *La probabilité d'un évènement certain est égale à 1.*

$$A \textit{ certain } \Leftrightarrow P(A) = 1.$$

3. *Si A et B sont des évènements quelconques, alors*

$$P(A \textit{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \textit{ et } B).$$

4. *Si A et B sont des évènements incompatibles, alors*

$$P(A \textit{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \textit{ (Loi de la somme).}$$

5. *A et $\overline{A}$ sont deux évènements contraires, alors*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

6. *Si A et B sont des évènements indépendants alors,*

$$P(A \textit{ et } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \textit{ (Loi du produit).}$$

La notion d'équiprobabilité intervient également dans le savoir à enseigner et y est définie de manière explicite. Elle permet de définir la probabilité d'un évènement au sens de Laplace, dans le cas où un dénombrement est possible.

Définition 2.2.22 (Evènements équiprobables) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
Deux évènements dont les probabilités sont égales sont dits ***équiprobables****. Lorsqu'une expérience aléatoire a n résultats possibles, les* ***évènements élémentaires*** *sont* ***équiprobables*** *si et seulement si la probabilité de chaque évènement est égale à $\frac{1}{n}$.*

Définition 2.2.23 (Laplace) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
Dans le cadre d'une expérience aléatoire dont les évènements élémentaires sont ***équiprobables****, la probabilité de l'évènement A est le rapport entre le nombre de résultats (cas) favorables à la réalisation de l'évènement A et le nombre de résultats (cas) possibles de l'expérience aléatoire :*

$$P(A) = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}.$$

Commentaires

Concernant les propriétés des probabilités, nous avons remarqué des nuances de rigueur dans la manière de présenter les concepts. D'autre part, certaines définitions du savoir savant sont implicites.

- Le manuel CQFD [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] approche les concepts sans forcément préciser les noms des formules (ex : Laplace) contrairement à Espace Math [Adam et Lousberg, 2012].
- La notion d'évènements équiprobables est clairement définie dans le savoir à enseigner mais n'est pas explicite dans les références consultées du savoir savant.
- Plusieurs propriétés faisant référence aux notions de croissance de suites et de partition sont abordées dans le savoir savant mais pas dans le savoir à enseigner.
- Dans le savoir à enseigner, la formule de Laplace est définie en « français » tandis que dans le savoir savant, elle est énoncée au travers des mesures de probabilité discrètes.
- Une différence de notation peut être également relevée pour désigner le cardinal d'un ensemble : *card A* dans le savoir savant et $\#A$ dans le savoir à enseigner.

2.2.1.4 Probabilités conditionnelles et indépendance d'évènements

Nous avons remarqué que les notions de probabilités conditionnelles et d'indépendance d'évènements apparaissent dans des ordres différents dans les deux types de savoirs. En effet, dans le savoir savant, des définitions et propriétés sur les probabilités conditionnelles sont énoncées avant celles sur l'indépendance d'évènements. En ce qui concerne le savoir à enseigner, c'est l'inverse.

Savoir savant

Le concept de probabilité conditionnelle peut intervenir dans deux situations. Il survient principalement lorsque nous disposons d'une information supplémentaire sur un évènement. D'autre part, les probabilités conditionnelles peuvent servir de chemin alternatif dans le calcul d'une probabilité quelconque.

Définition 2.2.24 (Probabilité conditionnelle) traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]
Si $P(B) > 0$ alors la probabilité conditionnelle que A se produit sachant que B s'est passé est définie par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

De cette définition, l'auteur dans [Ross, 2014] introduit une nouvelle façon de définir la probabilité de l'intersection entre évènements.

Corollaire 2.2.1 [Ross, 2014]

$$P(A \cap B) = P(A)P(A|B).$$

Ce corollaire peut s'écrire de manière plus générale en considérant plus de deux évènements.

Propriété 2.2.4 (Règle de multiplication) [Ross, 2014]

$$P(E_1E_2E_3...E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)...P(E_n|E_1...E_{n-1}).$$

Dans le but d'énoncer la formule de Bayes, un système complet est défini.

Définition 2.2.25 (Système complet) [Foata et Fuchs, 1998]
On dit qu'une suite (A_n) d'évènements est un système complet, si

(i) $i \neq j \Rightarrow A_iA_j = \emptyset$ *(les évènements A_n sont deux à deux incompatibles) ;*

(ii) $P(\sum_n A_n) = \sum_n P(A_n) = 1$ *(presque sûrement l'un des évènements A_n se réalise).*

Théorème 2.2.2 (Formule de Bayes) [Foata et Fuchs, 1998]
Soit (A_n) un système complet d'évènements, tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout évènement B, on a :

$$P(B) = \sum_n P(B|A_n)P(A_n); \tag{2.1}$$

si, de plus, $P(B) > 0$, on a, pour tout entier k, l'identité :

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_n P(B|A_n)P(A_n)}.$$

Le Résultat (2.1) est appelé formule des probabilités totales. Cette expression permet de faire apparaitre une idée de moyenne. En effet, soient A et B deux évènements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles, alors par la formule des probabilités totales, nous pouvons affirmer que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P(A|B) + P(\overline{A}) \times P(\overline{A}|B). \end{aligned}$$

Une fois que la notion de probabilité conditionnelle a été abordée dans le savoir savant, le concept d'indépendance d'évènements est introduit.

Définition 2.2.26 (Indépendance de deux évènements) [Ross, 2014]
Dans les cas où $P(E|F)$ est bien égale à $P(E)$, l'évènement E est dit indépendant de F. Plus précisément, E est indépendant de F si le fait de savoir que F est survenu ne change pas la probabilité de E. Du fait que $P(E|F) = P(EF)/P(F)$, on voit que l'indépendance de E et F équivaut à

$$P(EF) = P(E)P(F). \tag{2.2}$$

*Deux évènements E et F sont dits **indépendants** si l'équation (2.2) est vérifiée. Deux évènements sont **dépendants** s'ils ne sont pas indépendants.*

Cette définition peut être généralisée pour un nombre fini d'évènements et supérieur à trois.

Définition 2.2.27 (Indépendance totale de n évènements) [Ross, 2014]
Un ensemble d'évènements $E_1, E_2, ..., E_n$ est dit totalement indépendant si pour tout sous-ensemble $E_{1'}, E_{2'}, ..., E_{r'}$, $r \leq n$.

$$P(E_{1'}E_{2'}...E_{r'}) = P(E_{1'})P(E_{2'})...P(E_{r'}).$$

L'indépendance totale est plus forte que l'indépendance deux à deux. Ross propose une définition d'indépendance totale liant trois évènements.

Définition 2.2.28 (Indépendance totale de trois évènements) [Ross, 2014]
Trois évènements E, F et G sont dits totalement indépendants si

$$\begin{aligned} P(EFG) &= P(E)P(F)P(G), \\ P(EF) &= P(E)P(F), \\ P(EG) &= P(E)P(G), \\ P(FG) &= P(F)P(G). \end{aligned}$$

Définition 2.2.29 (Indépendance totale d'une infinité d'évènements) [Ross, 2014]
Un ensemble infini d'évènements est totalement indépendant si tout sous-ensemble fini d'entre eux est totalement indépendant.

Plusieurs propriétés peuvent découler de la notion d'indépendance d'évènements.

Propriété 2.2.5 [Foata et Fuchs, 1998]
Soient A, B, C (avec ou sans indices) des évènements.

(i) Si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants.

(ii) Si A et B sont indépendants, si A et C sont indépendants et si de plus $C \supset B$, alors A et $C \backslash B$ sont indépendants.

(iii) Tout évènement est indépendant de tout évènement de probabilité nulle ou de probabilité égale à 1.

(iv) Si (A_n) est une suite d'évènements deux à deux incompatibles et si A est indépendant de A_n pour tout n, alors A est indépendant de l'union disjointe $\sum_n A_n$.

La propriété qui suit établit un lien entre la probabilité conditionnelle et l'indépendance de deux évènements.

Propriété 2.2.6 traduit de [Borovkov, 2003]
Si $P(B) > 0$, alors l'indépendance des évènements A et B est équivalente à l'égalité

$$P(A|B) = P(A).$$

Savoir à enseigner

Le thème des probabilités conditionnelles est abordé dans le savoir à enseigner au moyen d'une définition et du produit de probabilités. Cependant, la notion d'indépendance d'évènements n'intervient pas dans les programmes de mathématiques avec deux périodes par semaine.

Définition 2.2.30 (Probabilité conditionnelle) [Adam et Lousberg, 2012]
La "probabilité de A, si B" est le quotient de la probabilité que A et B se produisent simultanément et de la probabilité de B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Dans [Van Eerdenbrugghe et Bousson, 2011], les auteurs proposent une interprétation de la définition de probabilité conditionnelle par

> *« la probabilité d'un évènement peut changer si on obtient des renseignements supplémentaires sur les conditions dans lesquelles se déroule l'expérience aléatoire. Si A et B sont deux évènements associés à une même expérience aléatoire et si $P(B) \neq 0$, alors la probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisé s'appelle **probabilité conditionnelle de** A **si** B. »*

Les auteurs de la version plus récente de CQFD [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] complètent cette définition par

> *« si au moment de commencer l'expérience aléatoire, on obtient des informations sur le déroulement de l'expérience, on est amené à réévaluer la probabilité qu'un évènement puisse se réaliser... surtout si ces informations ont un rapport évident avec l'évènement. »*

La formule du produit de probabilités est déduite de la définition de la probabilité conditionnelle.

Définition 2.2.31 (Produit de probabilités) [Adam et Lousberg, 2012]

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B).$$

La notion d'indépendance d'évènements a déjà été définie précédemment dans le savoir à enseigner à la Section 2.2.1.3. Cependant, comme les référentiels de l'enseignement secondaire mentionnent une section sur ce concept, des résultats supplémentaires sont précisés dans la suite. Dans le savoir à enseigner, l'indépendance est limitée à deux évènements.

Définition 2.2.32 (Indépendance de deux évènements) [Adam et Lousberg, 2012]
A et B sont deux évènements indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$. La probabilité que deux évènements indépendants se produisent simultanément est égale au produit des probabilités de ces évènements.

Les auteurs de [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] donnent une définition intuitive en précisant que

> *« Deux évènements associés à une même expérience aléatoire sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de la réalisation de l'autre.*
> *E et F sont indépendants lorsque $P(E|F) = P(E)$ et $P(F|E) = P(F)$. »*

.

Commentaires

La comparaison du thème des probabilités conditionnelles et de l'indépendance d'évènements nous amène à des remarques de notation, de généralisation mais aussi d'interprétation.

- Si nous regardons attentivement la définition de probabilité conditionnelle dans les deux savoirs, nous remarquons qu'elle est similaire. Si nous observons maintenant la règle de multiplication, elle est abordée mais les manuels scolaires ne considèrent que deux évènements.
- L'indépendance d'évènements est élargie à la notion d'indépendance totale dans le savoir savant alors que ce n'est pas le cas dans les référentiels et programmes de l'enseignement secondaire. En effet, dans le savoir à enseigner, le nombre d'évènements est limité à deux.
- Les auteurs de [Grimmett et Stirzaker, 2001] précisent que les étudiants font une erreur récurrente lorsqu'ils déterminent si deux évènements sont indépendants. En effet, soient A et B deux évènements. Les étudiants déduisent souvent que A et B sont indépendants si $A \cap B = \emptyset$. Or, cette condition nous précise simplement que les évènements sont disjoints.
- Il est également important de préciser que le savoir savant prolonge ces notions d'indépendance sur des variables aléatoires. Or, le savoir à enseigner reste sur l'indépendance d'évènements.
- Dans le savoir savant, la notion de probabilité conditionnelle est définie avant celle d'indépendance d'évènement alors que c'est l'inverse dans le savoir à enseigner.

2.2.2 Variables aléatoires et lois de probabilité

Maintenant que l'espace des probabilités a été construit au travers des notions définies à la section précédente, nous pouvons aborder celles relatives aux variables aléatoires et lois de probabilité. Comme précédemment, nous considérons n, i et k des naturels. Rappelons que l'objectif de ce chapitre est de comparer les concepts vus dans le savoir savant et le savoir à enseigner.

2.2.2.1 Variables aléatoires

Savoir savant

La notion de variable aléatoire est introduite dans le savoir savant par des éléments issus de la théorie de la mesure et de l'intégration. Les concepts d'algèbre et de σ-algèbre y sont notamment définis.

Définition 2.2.1 (Algèbre) traduit de [Borovkov, 2003]
Soient Ω un ensemble arbitraire d'évènements élémentaires et $\mathcal{A}$ une classe de la famille des parties de Ω. $\mathcal{A}$ est appelée une algèbre si les trois conditions qui suivent sont satisfaites.

a) $\Omega \in \mathcal{A}$.

b) Si $A \in \mathcal{A}$ *et* $B \in \mathcal{A}$, *alors* $A \cup B \in \mathcal{A}$.

c) Si $A \in \mathcal{A}$, *alors* $\overline{A} \in \mathcal{A}$.

Définition 2.2.2 (σ-algèbre ou tribu) traduit de [Borovkov, 2003]
Une classe d'ensembles $\mathcal{F}$ est appelée une σ-algèbre si la deuxième condition apparaissant dans la définition d'algèbre est satisfaite pour toute suite d'ensembles :
si $\{A_n\}$ est une suite d'ensembles de $\mathcal{F}$, alors

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \text{ et } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Il est intéressant de remarquer que cette définition de σ-algèbre est formulée différemment de la définition 2.2.14 de la section Probabilités proposée dans [Grimmett et Stirzaker, 2001].

Définition 2.2.3 (Plus petite σ-algèbre contenant une partie de $\mathbf{P}(\boldsymbol{\Omega})$)

traduit de [Borovkov, 2003]

Soit $\mathcal{B}$ une classe de sous-ensembles de Ω. La plus petite σ-algèbre contenant $\mathcal{B}$ est appelée la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{B}$ et est notée $\sigma(\mathcal{B})$. Elle correspond à l'intersection de toutes les σ-algèbres sur Ω contenant $\mathcal{B}$.

Il est précisé dans [Borovkov, 2003] que

> *« la σ-algèbre de Borel sur l'espace euclidien à n dimensions ($\mathbb{R}^n$) correspond à celle engendrée par des pavés ou des boules. Si Ω est dénombrable, alors la σ-algèbre générée par les éléments $\omega \in \Omega$ coïncide avec celle de tous les sous-ensembles de Ω. »*

Afin de comprendre la notion de variable aléatoire, les auteurs de [Foata et Fuchs, 1998] rappellent la définition d'une application réciproque. Celle-ci intervient en effet dans la condition de mesurabilité.

Définition 2.2.4 (Application réciproque) [Foata et Fuchs, 1998]
L'application réciproque X^{-1} d'une application $X : E \longrightarrow F$ est une application de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(F)$ dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, qui envoie toute partie B de F sur la partie $X^{-1}(B)$ de E formée de tous les éléments e tels que $X(e)$ appartient à B. L'ensemble $X^{-1}(B) = \{e \in E : X(e) \in B\}$ est appelé l'image réciproque de B.

La propriété qui suit permet de lier la notion d'application réciproque à celle de tribu.

Propriété 2.2.1 [Foata et Fuchs, 1998]
Soient $(F, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $X : E \longrightarrow F$ une application. Alors la famille $X^{-1}(\mathcal{F}) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de E.

Définition 2.2.5 (Fonction mesurable) [Foata et Fuchs, 1998]
Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables. On dit que $X : E \longrightarrow F$ est une fonction mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$, si $X^{-1}(\mathcal{F})$ est une sous-tribu de $\mathcal{E}$. Si $(F, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$, on parle simplement de fonction mesurable sur $(E, \mathcal{E})$.

La notation $\mathcal{B}^1$ est utilisée dans [Foata et Fuchs, 1998] pour désigner la tribu des boréliens sur l'ensemble des réels.

Propriété 2.2.2 [Foata et Fuchs, 1998]

1. *Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables. Pour qu'une application $X : E \longrightarrow F$ soit une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$, il suffit qu'il existe une classe $\mathcal{C}$ de parties de $\mathcal{F}$, qui engendre $\mathcal{F}$ et qui soit telle que $X^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{E}$.*
2. *Soient E un espace topologique et $\mathcal{E}$ la tribu engendrée par la classe des ouverts de E. Alors toute fonction continue $X : (E, \mathcal{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ est mesurable.*

Propriété 2.2.3 [Jacob et Protter, 2003]
Soient $(F, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable quelconque.

1. *Une indicatrice I_A est mesurable si et seulement si A appartient à $\mathcal{E}$.*
2. *Si $X_1, ..., X_n$ sont des fonctions réelles mesurables sur $(E, \mathcal{E})$ et si f est une fonction borélienne réelle sur $\mathcal{R}^n$, alors $f(X_1, ..., X_n)$ est mesurable.*
3. *Si X, Y sont des fonctions réelles mesurables sur $(E, \mathcal{E})$, il en est de même de $X + Y$, XY, $max(X, Y)$, $min(X, Y)$ et X/Y (si Y ne s'annule pas).*

Une fois ces notions de mesurabilité introduites, le concept de variable aléatoire est défini.

Définition 2.2.6 (Variable aléatoire) [Foata et Fuchs, 1998]
Un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ étant donné, on appelle variable aléatoire réelle (resp. variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou à n dimensions) une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ (resp. dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$).

Les auteurs de [Foata et Fuchs, 1998] soulignent que

> *« la mesure de probabilité P figurant dans le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ne joue aucun rôle ; seule intervient la tribu $\mathcal{A}$. La terminologie usuelle de variable aléatoire est donc, en toute rigueur, impropre. Cependant la variable "aléatoire" X définie sur le triplet permet de probabiliser l'espace d'arrivée $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^1)$. »*

Foata et Fuchs prolongent leur remarque en discutant les notations d'un point de vue probabiliste.

« Supposons donnés un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et un évènement A de la tribu $\mathcal{A}$. [...] si X est une variable aléatoire réelle définie sur cet espace et si B est un borélien de la droite, l'évènement $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ appartient à $\mathcal{A}$. On note cet évènement $\{X \in B\}$. Sa probabilité $P\{X \in B\}$ se lit probabilité que X soit dans B. L'ensemble B peut prendre diverses formes. On écrira, par exemple, $P\{X = b\}$ au lieu de $P\{X \in \{b\}\}$ et $P\{X \leq b\}$ au lieu de $P\{X \in]-\infty, b]\}$. Ces expressions sont lues probabilité que X soit égal à b et probabilité que X soit inférieur ou égal à b, respectivement. » [Foata et Fuchs, 1998]

Ce paragraphe établit un lien entre la probabilité d'un évènement et la notion de variable aléatoire. Elle montre également l'importance de la rigueur à adopter lors de l'utilisation des notations en probabilité. Si celle-ci est négligée, cela peut contribuer à une mauvaise compréhension de la part du lecteur. De plus, nous pouvons remarquer le degré d'abstraction qui apparait derrière les notions de borélien, de σ-algèbre et de tribu.

Le concept de loi de probabilité intervient à ce stade dans [Ross, 2014] et est déduit de la définition de variable aléatoire et de celle de probabilité d'un évènement.

Définition 2.2.7 *(Loi de probabilité)* [Ross, 2014]
Une variable aléatoire ne pouvant prendre qu'une quantité dénombrable de valeurs est dite discrète. Pour une telle variable aléatoire X, on définit sa loi de probabilité p par

$$p(a) = P\{X = a\}.$$

Cette loi de probabilité ne peut être positive que pour un ensemble au plus dénombrable d'arguments. En d'autres termes, si X peut prendre les valeurs $x_1, x_2, \dots,$ alors

$$\begin{aligned} &p(x_i) \geq 0, \\ &p(x) = 0 \textit{ pour toutes les autres valeurs de } x\,. \end{aligned}$$

Du fait que X doit bien prendre l'une de ces valeurs x_i, on aura

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.$$

Par la définition 2.2.7 ci-dessus, nous pouvons observer que la notion de loi de probabilité est associée au cas discret. Ce dernier sera distingué du cas continu dans la suite.

Propriété 2.2.4 [Foata et Fuchs, 1998]
Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ une variable aléatoire à n dimensions. Alors l'application $P_X : \mathcal{B}^n \longrightarrow [0, 1]$ définie pour tout borélien B de $\mathcal{B}^n$ par

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)),$$

est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. La mesure de probabilité P_X ainsi définie est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X. Elle est encore notée $\mathcal{L}(X)$. On dit aussi que X suit la loi de probabilité P_X.

L'introduction d'une variable aléatoire permet donc de transporter une probabilité P définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ sur l'espace probabilisable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. De cette manière, la variable X définit une nouvelle probabilité P_X sur l'espace $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.

Après avoir caractérisé la notion de loi de probabilité associée à une variable aléatoire, le concept de fonction de répartition est défini.

Définition 2.2.8 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle)

[Foata et Fuchs, 1998]

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de X la fonction qui a tout réel x associe le nombre $F(x)$ défini par :

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P_X(]-\infty, x]).$$

Propriété 2.2.5 [Foata et Fuchs, 1998]
La fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle X satisfait aux propriétés suivantes :

(i) $0 \leq F(x) \leq 1$ *;*

(ii) *F est une fonction croissante (au sens large), continue à droite en tout point x de $\mathbb{R}$;*

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Propriété 2.2.6 [Foata et Fuchs, 1998]
A toute fonction de répartition F correspond une et une seule mesure de probabilité P sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$, satisfaisant à $P(]-\infty, x]) = F(x)$ pour tout x réel.

Il est précisé dans [Ross, 2014] que

> *« dans le cas précis où les valeurs possibles de la variable aléatoire sont $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ avec $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots,$ la fonction F de répartition est une fonction en escalier. Ses valeurs seront constantes sur les intervalles $[x_{i-1}, x_i)$ et elle aura un saut de taille $p(x_i)$ en x_i, $i = 1, 2, \ldots$ »*

La notion de variable aléatoire discrète est définie dans [Foata et Fuchs, 1998] et [Grimmett et Stirzaker, 2001] par le biais du concept de fonction de masse. Ce dernier permet de faire intervenir les points de discontinuité de la fonction de répartition.

Définition 2.2.9 (Fonction de masse d'une variable aléatoire réelle)

[Foata et Fuchs, 1998]

Soient $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ une variable aléatoire réelle et F sa fonction de répartition. On appelle fonction de masse de X l'application $\pi(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $\pi(x) = P\{X = x\}$.

Propriété 2.2.7 [Foata et Fuchs, 1998]
La fonction de masse $\pi(\cdot)$ est entièrement déterminée par la loi de probabilité, donc par la fonction de répartition F. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\pi(x) = F(x) - F(x^-) = F(x^+) - F(x^-)$. Le nombre $\pi(x)$ est la hauteur du saut de F en x.

Propriété 2.2.8 [Foata et Fuchs, 1998]
Soient X une variable aléatoire, F sa fonction de répartition et $\pi(\cdot)$ sa fonction de masse. Posons :

$$D_X = \{x \in \mathbb{R} : \pi(x) > 0\}.$$

a) La fonction F est continue au point $x \in \mathbb{R}$, si et seulement si $\pi(x) = 0$.

b) La fonction F est continue sur tout $\mathbb{R}$, si et seulement si $D_X = \emptyset$; on dit alors que la loi de probabilité de X est diffuse.

c) L'ensemble D_X est fini ou dénombrable ; en d'autres termes, l'ensemble des points de discontinuité de F est fini ou dénombrable.

Parmi les différents types de variables aléatoires, le cas discret est souvent celui qui intervient en premier lieu dans le savoir savant.

Définition 2.2.10 (Variable aléatoire discrète) [Foata et Fuchs, 1998]
Soient X une variable aléatoire réelle et $\pi(\cdot)$ sa fonction de masse. On a vu que D_X est fini ou dénombrable ; on peut donc effectuer la somme $\sum\limits_{x \in D_X} \pi(x)$. Si cette somme est égale à 1, on dit que la variable aléatoire X est discrète et que D_X est son support.

La notion de variable aléatoire discrète est également définie dans [Foata et Fuchs, 1998] au moyen du concept de loi de probabilité.

Définition 2.2.11 (Variable aléatoire discrète) [Foata et Fuchs, 1998]
Une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est dite discrète, si la loi de probabilité P_X est une mesure de probabilité discrète sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.

Après avoir discuté du cas discret, les variables aléatoires continues sont ensuite évoquées. Celles-ci font intervenir la notion de fonction intégrable.

Définition 2.2.12 (Variable aléatoire continue) traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]
Une variable aléatoire X est appelée continue si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u, \ x \in \mathbb{R},$$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty[$ est une fonction intégrable, appelée fonction de densité de X.

Lemme 2.2.1 traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]
Si X admet une fonction de densité f, alors

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$,

(b) $P(X = x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

(c) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Nous pouvons lire dans [Ross, 2014] et [Foata et Fuchs, 1998] qu'il est possible de trouver d'autres types de variables aléatoires. Il s'agit des variables aléatoires singulières et simples. Cependant, dans le cadre de ce mémoire nous ne les abordons pas.

La valeur moyenne des résultats obtenus lors de N répétitions d'une même expérience aléatoire fait intervenir la notion d'espérance mathématique.

Définition 2.2.13 (Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète X) [Foata et Fuchs, 1998]

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle discrète X de loi $P_X = \sum\limits_i \alpha_i \epsilon_{x_i}$, où ϵ_{x_i} est la mesure de Dirac en x_i, est définie par

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \alpha_i x_i,$$

à condition que la série du second membre converge absolument. Dans ce cas, on dit que X a une espérance mathématique finie. Si la série $\sum\limits_i \alpha_i |x_i|$ diverge, on dit que X n'a pas d'espérance mathématique finie.

Définition 2.2.14 (Espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X) [Ross, 2014]

Si X est une variable aléatoire continue ayant pour densité $f(X)$, alors comme

$$f(x)\mathrm{d}x = P\{x \leq X \leq x + \mathrm{d}x\} \textit{ pour } \mathrm{d}x \textit{ petit},$$

il est facile de voir que la définition analogue au cas discret de l'espérance de X est

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x.$$

L'espérance mathématique ou la valeur moyenne d'une variable aléatoire est associée à la position du centre de gravité dans [Grimmett et Stirzaker, 2001] et [Foata et Fuchs, 1998]. Il s'agit d'une analogie établie avec la notion de barycentre de points matériels en mécanique.

Afin de progresser dans l'analyse des variables aléatoires dans le savoir savant, la notion de propriété vraie presque sûrement est énoncée ainsi que des propriétés découlant de la définition de l'espérance mathématique (monotonie et linéarité de l'espérance, etc). Cependant, nous ne les abordons pas puisqu'elles n'interviendront pas dans le savoir à enseigner. Un lien est également établi entre cette notion d'espérance et celle d'indépendance. De surcroît, elle peut être associée à la notion de moment d'ordre un à l'origine d'une variable aléatoire.

Propriété 2.2.9 (Indépendance) [Foata et Fuchs, 1998]
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[XY]$ est finie et l'on a $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Définition 2.2.15 ($\mathbf{k}^{\mathbf{e}}$ moment d'une variable aléatoire) traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]

Si k est un naturel positif, le k^e moment m_k de X est défini par $m_k = \mathbb{E}[X^k]$. Le k^e moment central σ_k est donné par $\sigma_k = \mathbb{E}[(X - m_1)^k]$.

Il est spécifié dans le savoir savant que le deuxième moment d'une variable aléatoire X correspond au concept de variance de X et est noté $var(X)$ ou $\mathbb{V}(X)$. La définition d'écart-type émane directement de celle de la variance.

Définition 2.2.16 (Écart-type) traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]
Soit X une variable aléatoire réelle. L'écart-type de X, noté $\sigma(X)$, est défini par la racine carrée positive de la variance de X.

Propriété 2.2.10 [Foata et Fuchs, 1998]
Une variable aléatoire réelle X a un moment d'ordre deux $\mathbb{E}[X^2]$ fini, si et seulement si son espérance mathématique $\mathbb{E}[X]$ et sa variance $var(X)$ existent et sont finies, et l'on a :

$$var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Théorème 2.2.1 traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]
Soient X et Y deux variables aléatoires,

(a) $var(aX) = a^2 var(X)$ pour $a \in \mathbb{R}$;

(b) $var(X + Y) = var(X) + var(Y)$ si X et Y sont non corrélées.

En plus des notions d'espérance mathématique, de variance et d'écart-type, celle de covariance est également définie.

Définition 2.2.17 (covariance) [Foata et Fuchs, 1998]
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi conjointe donnée. Si X et Y ont des moments du second ordre finis, la covariance de X et Y est définie par :

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Savoir à enseigner

Le concept de variable aléatoire est tout d'abord défini sans préciser s'il s'agit du cas discret ou continu.

Définition 2.2.18 (Variable aléatoire) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*Une **variable aléatoire** X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, qui associe une valeur x_i à chacune des issues d'une expérience aléatoire.*

Il est ensuite spécifié dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] que les variables aléatoires qui prennent un nombre fini de valeurs sont caractérisées de discrètes. Les auteurs de [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] définissent alors les notions de loi de probabilité, de fonction de répartition et d'espérance mathématique dans le cas discret avant de les énoncer dans le cas continu.

Définition 2.2.19 (Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

*La **loi (ou distribution) de probabilité** d'une variable aléatoire discrète est la fonction qui, à chacune des valeurs de la variable, associe la probabilité correspondante.*

Une formulation différente de la définition de loi de probabilité est proposée dans le manuel Espace Math [Adam et Lousberg, 2012] et apparait comme suit.

Définition 2.2.20 (Loi de probabilité) [Adam et Lousberg, 2012]
La loi de probabilité f d'une variable aléatoire X est la fonction qui, à chaque x_i, fait correspondre la probabilité que X égale x_i : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x_i \mapsto P(X = x_i)$.

Il est précisé dans [Adam et Lousberg, 2012] que la somme de toutes les images $f(x_i)$ est égale à 1. Les auteurs proposent également une représentation pour considérer toutes les valeurs prises par une variable aléatoire.

Définition 2.2.21 (Polygone de probabilité) [Adam et Lousberg, 2012]
Le polygone de probabilité de la variable aléatoire est la ligne brisée obtenue en joignant entre eux, dans l'ordre, les points du graphe cartésien de f.

La Figure 2.2, apparaissant dans [Adam et Lousberg, 2012], illustre le polygone de probabilité d'une variable aléatoire qui compte le nombre de piles obtenus lors de deux lancers d'une pièce de monnaie.

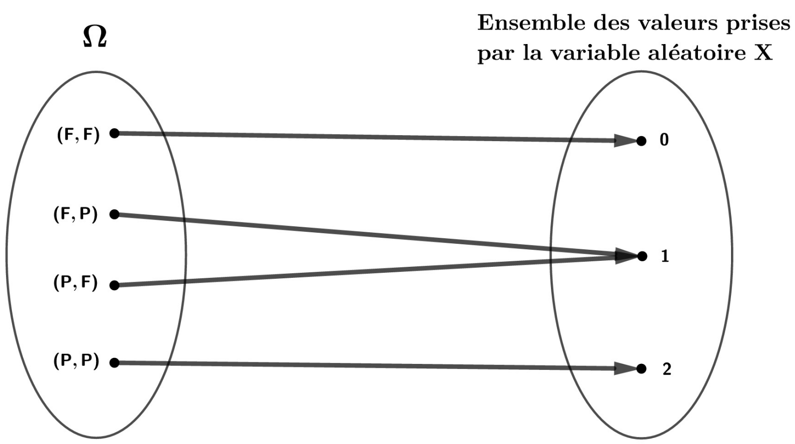


FIGURE 2.2 – Exemple de polygone de probabilité d'une variable aléatoire

Source: [Adam et Lousberg, 2012]

Définition 2.2.22 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

*La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X est la fonction F définie par*

$$F(x) = P(X \leq x).$$

À tout réel x, elle fait correspondre la probabilité que X soit inférieur ou égal à x.

Définition 2.2.23 (Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

*L'**espérance mathématique** $E(X)$ d'une variable aléatoire discrète est la somme des valeurs de cette variable pondérées par les probabilités correspondantes. C'est la somme des produits des valeurs x_i de la variable aléatoire par les probabilités $p_i = P(X = x_i)$ correspondantes :*

$$E(X) = p_1 x_1 + ... + p_n x_n.$$

Les auteurs du manuel CQFD [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] indiquent que

> *« l'espérance mathématique d'une variable aléatoire est une transposition de la moyenne arithmétique définie en statistique. »*

Définition 2.2.24 (Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

*La **variance** $V(X)$ d'une variable aléatoire discrète est la somme des carrés des écarts de la variable aléatoire à son espérance mathématique, pondérés par les probabilités correspondantes.*

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i [x_i - E(X)]^2.$$

*L'**écart-type** $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire est la racine carrée de sa variance.*

Nous pouvons lire dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] que l'écart-type se mesure dans la même unité que la variable aléatoire. En guise de remarque, les auteurs donnent la formule de calcul pratique de la variance par $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. De plus, il est précisé dans [Adam et Lousberg, 2012] que

> *« l'espérance mathématique mesure en quelque sorte la "valeur moyenne" de X. [...]. La variance et l'écart-type mesurent chacun à sa manière la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de l'espérance mathématique dans l'intervalle $[E(X) - \sigma(X); E(X) + \sigma(X)]$. »*

En ce qui concerne la variable aléatoire continue, il est indiqué dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] que

> *« la probabilité qu'elle prenne une valeur bien précise est nulle ; si ce n'était pas le cas, la somme des probabilités serait infinie et non égale à 1. »*

Il est alors déduit dans le savoir à enseigner qu'un intervalle est nécessaire pour définir une variable aléatoire continue.

Définition 2.2.25 (Variable aléatoire continue) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*Une **variable aléatoire continue** est une variable aléatoire qui peut prendre toutes les valeurs réelles d'un intervalle I.*

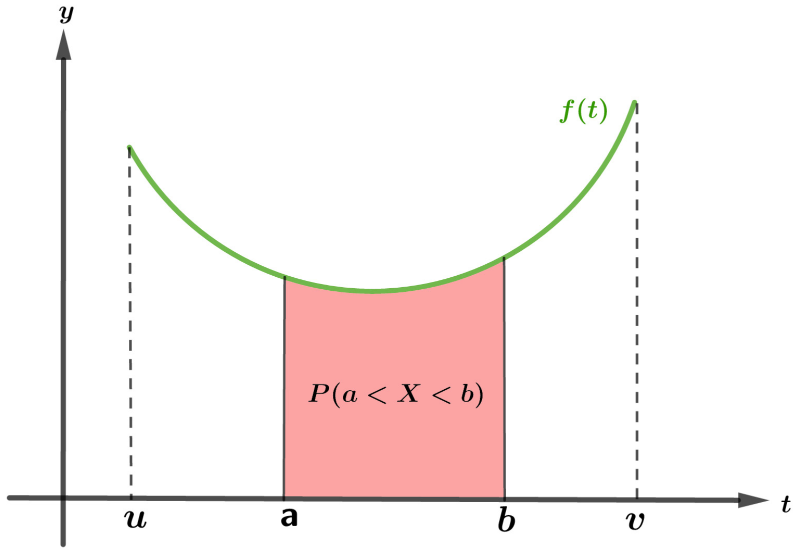


Figure 2.3 – Probabilité sur $[a, b]$

Source: [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

Définition 2.2.26 (Densité de probabilité) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
Nous appelons densité de probabilité sur un intervalle $[u; v]$ *de* $\mathbb{R}$ *une fonction* f *définie, continue et positive sur* I *telle que* $\int_u^v f(t)\mathrm{dt} = 1$. *Quel que soit l'intervalle* $[a; b]$ *contenu dans l'intervalle* $[u; v]$ *(c'est-à-dire* $[a; b] \subset [u; v]$*), on a*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\mathrm{dt}.$$

La définition de densité de probabilité dans le cas continu est illustrée dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] par la Figure 2.3. Les auteurs indiquent alors que

> *« La probabilité sur un intervalle* $[a; b]$ *est l'aire de la surface sous la courbe (Figure 2.3). »*

Définition 2.2.27 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X *est la fonction* F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$F(X) = P(X \leq x).$$

Plusieurs propriétés concernant les notions de fonction de répartition et de densité de probabilité sont précisées dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018].

Propriété 2.2.11 [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

— *La fonction de répartition est dérivable sur* I *et sa dérivée est la densité de probabilité sur* I $(F' = f)$.
— *La fonction de répartition est croissante sur* I.
— *Quels que soient les réels* a *et* b $(a < b)$ *de* I,
  - $P(X = a) = 0$;
  - $P(X < a) = P(X \leq a) = F(a)$;
  - $P(X > a) = P(X \geq a) = 1 - F(a)$;
  - $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Définition 2.2.28 (Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire continue) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

L'espérance mathématique est définie par $E(X) = \int_u^v tf(t)\mathrm{d}t$.
La variance est définie par $\mathbb{V}(X) = \int_u^v [t - E(X)]^2 f(t)\mathrm{d}t$.
L'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Un tableau comparatif entre les notions de variables aléatoires discrète et continue est proposé dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018].

	Variable aléatoire discrète	**Variable aléatoire continue**
Nombre de valeurs	Fini ou dénombrable (n)	Infini
Probabilité	La loi de probabilité donne la probabilité pour chaque valeur de X.	La fonction de densité permet de calculer la probabilité qu'une valeur appartienne à un intervalle $[u; v]$.
Fonction de répartition	Somme de probabilités	Intégrale de la fonction densité
Espérance mathématique	$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$	$E(X) = \int_u^v f(t)t\mathrm{d}t$
Variance	$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$	$V(X) = \int_u^v (t - E(X))^2 f(t)\mathrm{d}t$
Ecart-type	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Une comparaison entre les notions de variable aléatoire et celles de statistique est par contre établie par les auteurs de [Adam et Lousberg, 2012].

Variable aléatoire	**Statistique**
Loi de probabilité	Série statistique
$P(X = x_i)$	Fréquence de x_i
Polygone de probabilité	Polygone de fréquence
Espérance mathématique	Moyenne arithmétique
Variance	Variance
Écart-type	Écart-type

Commentaires

Concernant le savoir savant, les notions de variables aléatoires discrète et continue sont traitées séparément. En effet, celles-ci apparaissent dans des parties différentes alors que dans le savoir à enseigner, les manuels les distinguent en énonçant d'abord les lois discrètes et ensuite les lois continues.

- Les concepts de variable aléatoire, de loi de probabilité, de fonction de répartition, d'espérance mathématique et de variance sont à chaque fois définis pour le cas discret et le cas continu dans les deux types de savoir. Néanmoins, nous remarquons que dans le savoir à enseigner, un tableau de comparaison faisant également office de synthèse est proposé.

- Dans le savoir savant, contrairement au savoir à enseigner, des éléments d'intégration et de mesure sont utilisés pour définir les résultats associés aux variables aléatoires et lois de probabilité.
- Dans le savoir savant, la définition d'une variable aléatoire discrète se base sur le concept de fonction de masse tandis que dans le savoir à enseigner, ce n'est pas abordé. À l'inverse, la notion de polygone de probabilité est vue dans le manuel Espace Math [Adam et Lousberg, 2012] et pas dans le savoir savant.
- Sur base des définitions d'espérance mathématique et de variance, le savoir savant développe plusieurs propriétés qui n'interviennent pas dans le savoir à enseigner. Il s'agit par exemple de celles associées à la linéarité et à la monotonie. De plus, le savoir savant aborde le concept de covariance que le savoir à enseigner ne considère pas. Il énonce également la notion de moment d'ordre k tandis que le savoir à enseigner considère uniquement le cas particulier d'ordre un.

Maintenant que nous avons relevé les concepts définis de manière générale, nous pouvons préciser les cas discret et continu au moyen des lois de probabilité s'y rapportant.

2.2.2.2 Variable aléatoire suivant une loi binomiale

Savoir savant

Afin de définir une variable aléatoire de loi binomiale, le savoir savant définit la notion de variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli.

Définition 2.2.29 (Variable aléatoire de Bernoulli) [Ross, 2014]
On réalise une expérience dont le résultat sera interprété soit comme un succès soit comme un échec. On définit alors la variable aléatoire X en lui donnant la valeur 1 lors d'un succès et 0 lors d'un échec. La loi de probabilité de X est alors

$$\begin{aligned} p(0) &= P\{X = 0\} = 1 - p; \\ p(1) &= P\{X = 1\} = p. \end{aligned} \tag{2.3}$$

où p est la probabilité d'un succès, $0 \leq p \leq 1$.
*Une variable aléatoire X est dite **de Bernoulli** (du nom du mathématicien suisse Jacques Bernoulli) s'il existe un nombre $p \in (0,1)$ tel que la loi de probabilité de X soit donnée par (2.3).*

Propriété 2.2.12 (Espérance et variance d'une loi de Bernoulli)
traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]

Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli associée à une probabilité de succès p.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= p; \\ \mathbb{V}(x) &= p(1-p). \end{aligned}$$

Définition 2.2.30 (Variable aléatoire de loi binomiale) [Ross, 2014]
*Supposons qu'on exécute maintenant n épreuves indépendantes, chacune ayant p pour probabilité de succès et $1 - p$ pour probabilité d'échec. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès sur l'ensemble des n épreuves est dite variable aléatoire **binomiale** de paramètres (n, p). Une variable de Bernoulli n'est donc qu'une variable binomiale de paramètres $(1, p)$. La loi de probabilité d'une variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p) est donnée par*

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \text{ pour } i = 0, 1, ..., n.$$

Propriété 2.2.13 (Espérance et variance d'une loi binomiale)

traduit de [Grimmett et Stirzaker, 2001]

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre (n, p).

$$\mathbb{E}[X] = np;$$
$$\mathbb{V}(x) = np(1 - p).$$

Savoir à enseigner

La définition de loi binomiale intervient après celles d'épreuve et de schéma de Bernoulli.

Définition 2.2.31 (Épreuve de Bernoulli) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
Une ***épreuve de Bernoulli*** *de paramètre p est une expérience aléatoire qui n'a que deux résultats possibles. Ils sont donc désignés habituellement par* ***succès*** *(de probabilité p) et* ***échec*** *(de probabilité $(1 - p)$). Le succès est généralement désigné par la valeur 1 et l'échec par la valeur 0.*

Le tableau qui suit et figurant dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] donne la loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli pour autant que la probabilité d'un succès p soit connue.

$\mathbf{x_i}$	**1**	**0**
$P(X = x_i)$	p	$q = 1 - p$

Définition 2.2.32 (Schéma de Bernoulli) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
Un ***schéma de Bernoulli*** *est une expérience aléatoire constituée par un ensemble de répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli.*

Il est ensuite précisé dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] que la variable aléatoire d'un schéma de Bernoulli est une variable aléatoire discrète puisqu'elle compte le nombre de succès obtenus après n répétitions.

Définition 2.2.33 (Loi binomiale de paramètres n et p) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
On appelle loi binomiale de paramètres n et p, notée $B(n, p)$, la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p. Les probabilités des valeurs de cette variable aléatoire sont données par la formule

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k},$$

dans laquelle k désigne le nombre de succès.

Propriété 2.2.14 (Espérance mathématique, variance et écart-type d'une loi binomiale)

[Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

Pour une variable aléatoire qui suit une loi binomiale, on a

$$E(X) = np, \ V(X) = np(1 - p) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1 - p)}.$$

Les auteurs de [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] indiquent explicitement que

« le graphique d'une loi binomiale est un diagramme en bâtons. »

Un tel type de diagramme figure dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] en guise d'exemple mais aucune discussion n'est établie.

Commentaires

En ce qui concerne la loi binomiale, celle-ci est introduite dans les deux savoirs de manière similaire grâce à celle de Bernoulli. Toutefois, des différences de notations peuvent être relevées.

- Le schéma de Bernoulli est utilisé dans le savoir à enseigner contrairement au savoir savant qui ne se base que sur la définition d'une variable aléatoire de Bernoulli.
- D'un point de vue des notations, nous pouvons remarquer l'usage de deux notions différentes pour les coefficients binomiaux : $\binom{n}{k}$ et C_n^k, où k et n sont des naturels.
- L'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli ne sont pas spécifiées dans le savoir à enseigner alors que cela est fait pour une loi binomiale. De plus, l'expression de l'écart-type est présente alors que dans le savoir savant, elle n'est pas indiquée explicitement.
- Une différence de notation peut être relevée lors de l'écriture d'un intervalle. En effet, des parenthèses sont utilisées dans la plupart des cas dans le savoir savant alors que dans le savoir à enseigner, il s'agit de crochets.

2.2.2.3 Variable aléatoire suivant une loi uniforme

Savoir savant

La loi uniforme intervient dans le savoir savant au moment d'aborder les variables aléatoires dites continues.

Définition 2.2.34 (Variable uniforme sur $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$) [Ross, 2014]
*Une variable aléatoire est dite **uniformément distribuée** sur l'intervalle $(0, 1)$ si sa densité est*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}. \tag{2.4}$$

Dans [Ross, 2014], l'auteur exprime que la fonction f définie par (2.4) est bien une fonction de densité en vérifiant les conditions associées. D'autre part, il précise que

> *« la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur dans un sous-intervalle de $(0, 1)$ vaut la longueur de ce dernier. »* [Ross, 2014]

Définition 2.2.35 (Variable uniforme quelconque) [Ross, 2014]
En généralisant, une variable aléatoire est uniforme sur l'intervalle (α, β) si sa densité est

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \textit{si } \alpha < x < \beta \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}. \tag{2.5}$$

Une définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire uniforme est également donnée dans [Ross, 2014].

Définition 2.2.36 (Fonction de répartition de variable aléatoire uniforme) [Ross, 2014]
À partir de $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ et de (2.5), on obtient la fonction de répartition d'une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle (α, β) :

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \textit{si } a \leq \alpha \\ \dfrac{a - \alpha}{\beta - \alpha} & \textit{si } \alpha < a < \beta \\ 1 & \textit{si } a \geq \beta \end{cases}.$$

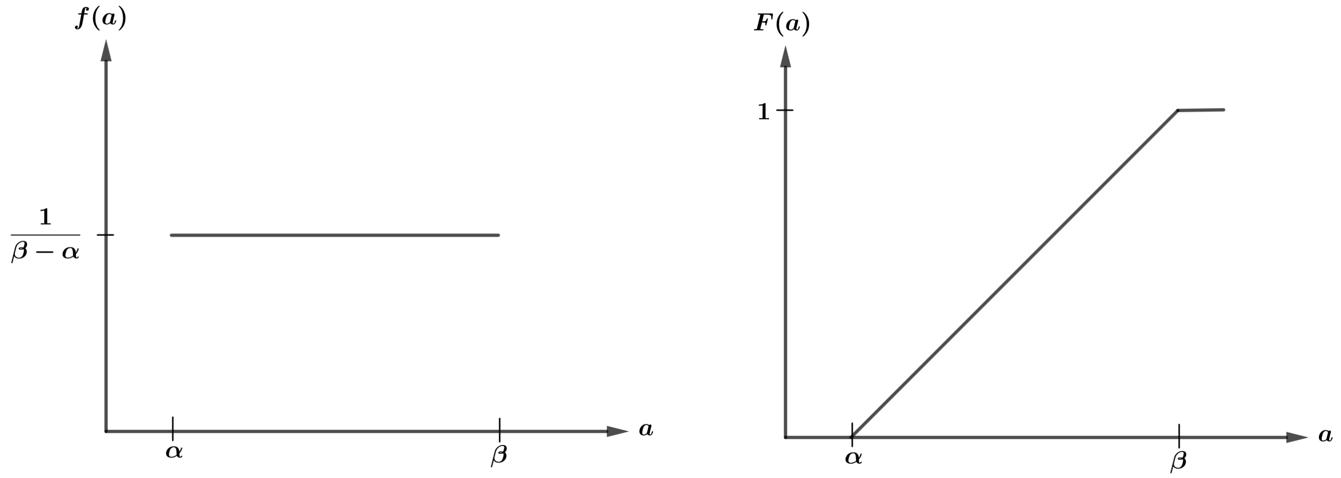


FIGURE 2.4 – Graphe de la densité et de la fonction de répartition d'une variable aléatoire uniforme quelconque

Source: [Ross, 2014]

La notion de densité et de fonction de répartition associée à une loi uniforme sur un intervalle quelconque $[\alpha, \beta]$ est illustrée dans [Ross, 2014] par la Figure 2.4. De plus, Ross développe explicitement l'espérance et la variance d'un tel type de variable aléatoire par un exemple.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\beta + \alpha}{2};$$
$$\mathbb{V}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

Savoir à enseigner

En ce qui concerne le savoir à enseigner, la loi uniforme est définie à la fois dans le cas discret et dans le cas continu.

Définition 2.2.37 (Loi uniforme discrète) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*On appelle **loi uniforme discrète** la loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui prend n valeurs distinctes $x_1, x_2, ..., x_n$ dont les probabilités $p_i = P(X = x_i)$ sont égales.*

Il est ensuite précisé dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] que

> « puisque les n probabilités p_i sont égales et que leur somme vaut 1, on a $p_i = P(X = x_i) = \frac{1}{n}$. Cas particulier : la variable aléatoire X prend ses valeurs n dans $[1; 2; ...; n]$. »

Le tableau qui suit est également proposé par les auteurs de [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018].

$\mathbf{x_i}$	**1**	**2**	**3**	...	**n**
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Dans le cas continu, la loi uniforme est tout d'abord définie sur un intervalle quelconque. Ensuite, le cas particulier $[0, 1]$ est considéré.

Définition 2.2.38 (***Loi uniforme sur*** $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*La **loi uniforme sur*** $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ *est la loi continue, dont la densité de probabilité est la fonction constante sur l'intervalle* $[a;b]$*, définie par*

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \textit{pour } x < a \\ f(x) = \dfrac{1}{b-a} & \textit{pour } a \leq x \leq b \\ f(x) = 0 & \textit{pour } x > b \end{cases}.$$

Propriété 2.2.15 (Espérance mathématique et variance d'une loi uniforme) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

Soit X *une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur un intervalle* $[a;b]$.
L'espérance, la variance et l'écart-type sont donnés par

$$E(X) = \frac{a+b}{2},\ V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \textit{ et } \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Les auteurs de [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] proposent de réaliser en exercice la démonstration des propriétés de la variance et de l'espérance d'une loi uniforme. De plus, il est exprimé explicitement dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] que

> *« la probabilité qu'un nombre réel choisi au hasard dans l'intervalle* $[0;1]$ *appartienne à un intervalle* $[a;b] \subset [0;1]$ *avec* $a < b$ *est égale à l'amplitude* $b-a$ *de l'intervalle, ce qu'on note* $P(a < X < b) = b - a$*. »*

Définition 2.2.39 (***Loi uniforme sur*** $[\mathbf{0};\mathbf{1}]$) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
*La **loi uniforme sur*** $[0;1]$ *est la loi continue dont la densité de probabilité est la fonction* f *définie par*

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \textit{pour } x < 0 \\ f(x) = 1 & \textit{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 0 & \textit{pour } x > 1 \end{cases}.$$

Définition 2.2.40 (Fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[\mathbf{0};\mathbf{1}]$) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

La fonction de répartition F *de la loi uniforme est définie par*

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \textit{pour } x < 0 \\ F(x) = x & \textit{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ F(x) = 1 & \textit{pour } x > 1 \end{cases}.$$

Afin d'illustrer la notion de fonction de répartition et de densité d'une variable aléatoire de loi uniforme, les auteurs de [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] proposent la Figure 2.5. Ils en donnent également une interprétation en indiquant que

> *« la densité de probabilité sur un intervalle* $[a;b] \subset [0;1]$ *est représentée par l'aire du rectangle de base* $[a;b]$ *et de hauteur* 1*. »*

Cette même référence donne ensuite l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;1]$.

Définition 2.2.41 (Espérance mathématique et variance d'une loi uniforme sur $[\mathbf{0};\mathbf{1}]$) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

Pour la loi uniforme définie sur l'intervalle $[0;1]$*, on a*

$$E(X) = \frac{1}{2},\ V(X) = \frac{1}{12} \textit{ et } \sigma(X) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

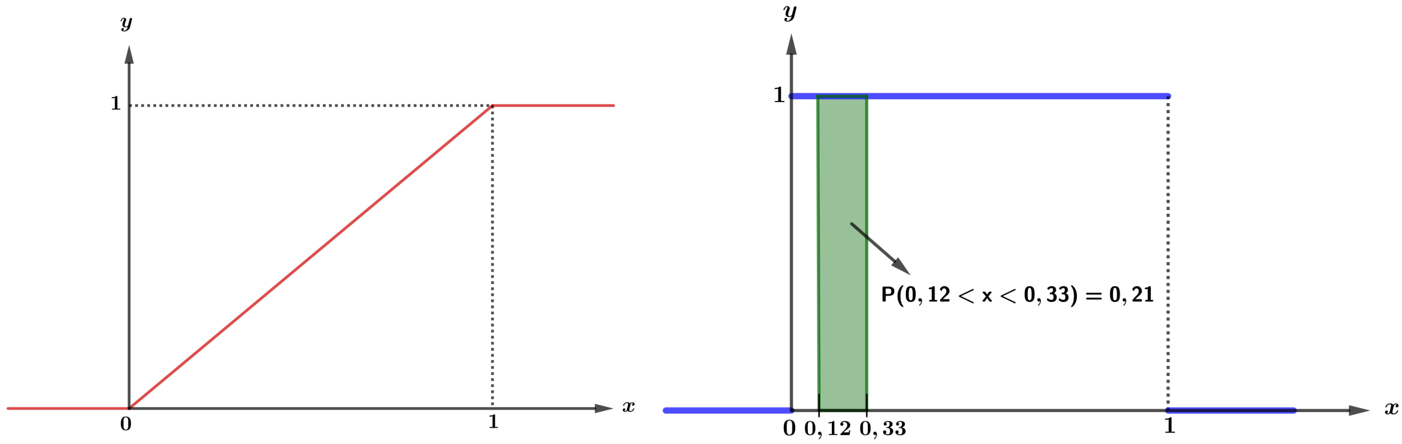


FIGURE 2.5 – Fonction de répartition et densité d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme

Source: [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

Commentaires

Pour les lois uniformes, les commentaires établis sont de nouveau liées à l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type. En outre, contrairement à la loi binomiale, des graphiques sont utilisés et interprétés pour illustrer les notions. Nous pouvons dès lors discuter leur représentation.

- Dans le savoir à enseigner, une définition d'espérance mathématique, de variance et d'écart-type associée à une variable aléatoire uniforme est donnée explicitement. Dans le savoir savant, elles sont plutôt développées au travers d'un exemple ou d'un exercice.
- Les auteurs de [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] vérifient les conditions d'une densité uniquement pour le cas particulier d'une loi uniforme sur $[0; 1]$ tandis que les références du savoir savant les valident dans le cas général.
- Par rapport aux Figures 2.4 et 2.5, le cas général d'une loi uniforme est plutôt illustré dans le savoir savant tandis que le savoir à enseigner reste dans le cas particulier sur $[0; 1]$. Le graphe de la densité figurant dans le savoir à enseigner permet de relier la probabilité d'un évènement à une aire. Cet évènement est par ailleurs lié à une variable aléatoire sur un intervalle donné. Si nous regardons attentivement le nom des axes, nous remarquons également une différence de notation : y dans le savoir à enseigner, $f(\cdot)$ et $F(\cdot)$ pour le savoir savant. Ce deuxième savoir fait directement référence à une fonction.

2.2.2.4 Variable aléatoire suivant une loi normale

Savoir savant

Dans le savoir savant, la notion de variable aléatoire de loi normale est directement définie.

Définition 2.2.42 (Variable aléatoire de loi normale) [Ross, 2014]
Une variable aléatoire X est dite normale - ou parfois distribuée normalement - avec paramètres μ et σ^2 si la densité de X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{où } -\infty < x < +\infty.$$

Il est précisé dans [Foata et Fuchs, 1998] que μ et σ sont des réels mais que σ est strictement positif. L'auteur de [Ross, 2014] ajoute que l'allure de la densité d'une loi normale prend une forme de cloche et possède un axe de symétrie vertical situé en μ. De plus, il continue sa remarque en expliquant que de nombreux phénomènes aléatoires suivent approximativement une loi normale.

Ross développe aussi explicitement l'expression de l'espérance mathématique et de la variance d'une variable aléatoire X normale de paramètre μ et σ^2 au moyen d'un exemple.

$$\mathbb{E}[X] = \mu;$$
$$var(X) = \sigma^2.$$

Il développe ensuite le cas particulier des variables aléatoires centrées réduites.

Définition 2.2.43 (Variable aléatoire normale centrée réduite) [Ross, 2014]
Si X est une variable aléatoire normalement distribuée et de paramètres μ et σ^2, la variable $Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ est normalement distribuée de paramètre 0 et 1. Une variable normale ayant ces deux paramètres est dite ***standard*** *ou* ***centrée réduite****. L'usage s'est établi de noter la fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite par le symbole ϕ. En clair,*

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\dfrac{-y^2}{2}} \,\mathrm{d}y.$$

Les valeurs $\phi(x)$ pour des arguments x non négatifs sont données dans une table. Pour les arguments x négatifs, on calcule $\phi(x)$ grâce à l'équation

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x), \text{ où } -\infty < x < \infty. \tag{2.6}$$

La table permettant d'identifier l'aire $\phi(x)$ située sous la densité normale standard à gauche de x est proposée dans [Ross, 2014]. Il rappelle par ailleurs la symétrie de cette densité en indiquant que, par (2.6), nous pouvons écrire, pour une variable normale Z centrée réduite, $P\{Z \leq -x\} = P\{Z > x\}$, avec $-\infty < x < \infty$.

Ross définit d'une autre manière la fonction de répartition d'une loi normale quelconque au moyen de la fonction $\phi(\cdot)$. Il utilise pour ce faire la définition d'une loi normale standard.

Définition 2.2.44 (Fonction de répartition d'une loi normale quelconque) [Ross, 2014]
Si l'on considère une variable aléatoire X de paramètres μ et σ^2 quelconques, la variable $Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ sera normale centrée réduite. Par conséquent, on peut exprimer la fonction de répartition de X de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P\{X \leq a\} \\ &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Ross établit également un lien entre une loi discrète binomiale et une loi continue normale au moyen du théorème limite de De Moivre-Laplace. Il précise ensuite que

> *« ce théorème "standardise" une variable aléatoire binomiale de paramètre n et p en soustrayant d'abord sa moyenne np puis en divisant le résultat par son écart-type $\sqrt{np(1-p)}$, alors la variable aléatoire standardisée (de moyenne 0 et de variance 1) suivra approximativement, lorsque n est grand, une distribution normale standard. »*
> [Ross, 2014]

Théorème 2.2.2 (Théorème limite de De Moivre-Laplace) [Ross, 2014]
Soit S_n le nombre de succès lors de la réalisation de n épreuves indépendantes, la probabilité de réussite pour chaque épreuve étant p. Alors, pour tout $a < b$, on peut écrire

$$P\left\{a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\} \to \phi(b) - \phi(a),$$

lorsque $n \to \infty$.

Théorème 2.2.3 (Théorème central limite) [Ross, 2014]
Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance μ, de variance σ^2. Alors la distribution de

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

tend vers la distribution normale lorsque $n \to \infty$, ce qui veut dire que

$$P\left\{\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{-x^2}{2}} \, \mathrm{d}x,$$

quand $n \to \infty$.

Le mathématicien de [Ross, 2014] remarque que le théorème limite 2.2.2 est un cas particulier du théorème central limite. De plus, il précise que deux approximations pour la répartition binomiale sont possibles mais que certaines conditions doivent être respectées. D'une part, nous pouvons utiliser la loi de Poisson lorsque n est grand et np n'est pas élevé. D'autre part, la loi binomiale peut être approximée par une normale lorsque $np(1-p)$ est grand, c'est-à-dire d'au moins 10 selon Ross.

Savoir à enseigner

La forme de cloche est également mentionnée pour représenter la loi de distribution normale. Elle est appelée courbe de Gauss.

Définition 2.2.45 (Loi de distribution normale) [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
Une loi de distribution normale, dite aussi distribution de Laplace-Gauss, de paramètre μ et σ, est une densité de probabilité définie par l'expression

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Les auteurs de [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] précisent qu'une variable aléatoire de distribution normale est continue, d'espérance mathématique égale à μ et d'écart-type σ. Ils ajoutent un ensemble de résultats propres aux lois normales.

Propriété 2.2.16 [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
La courbe d'une loi normale est une courbe en cloche, dont voici les caractéristiques :

- *elle est symétrique par rapport à la droite $x = \mu$;*

— *quelle que soit sa forme (plus ou moins aplatie) comme à la Figure 2.6, l'aire comprise entre la courbe et l'axe Ox est toujours égale à 1 ;*

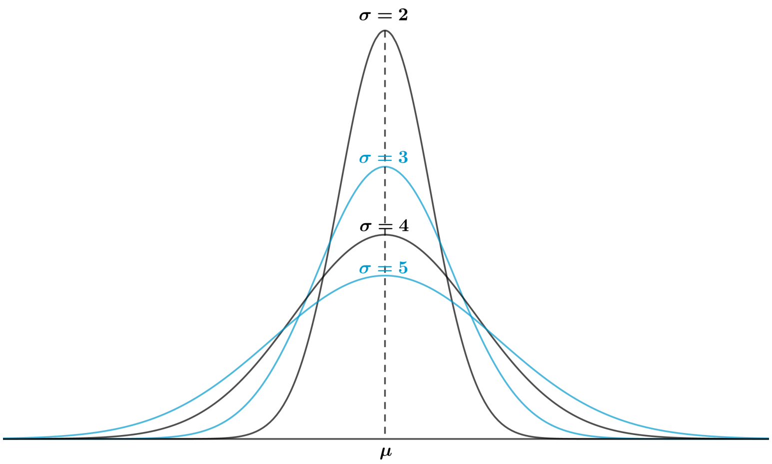


FIGURE 2.6 – Représentation de plusieurs densités de probabilité d'une loi normale

Source: [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

— *la probabilité qu'un résultat soit compris entre a et b est égale à l'aire sous la courbe entre les droites $x = a$ et $x = b$ comme illustré à la Figure 2.7. On a donc*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t;$$

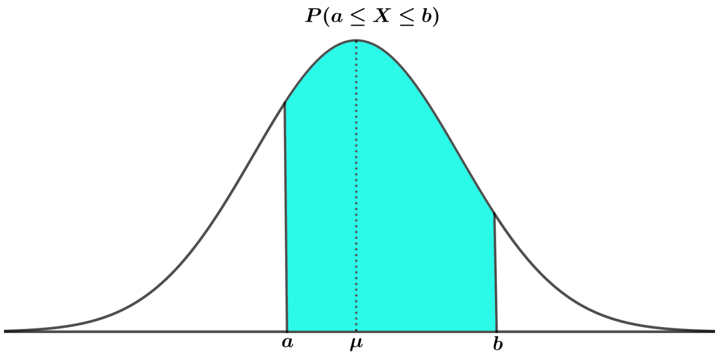


FIGURE 2.7 – Probabilité vue comme une aire sous une courbe

Source: [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

— *on a toujours comme à la Figure 2.8,*

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68,3\%;$$
$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 95,4\%;$$
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 99,7\%.$$

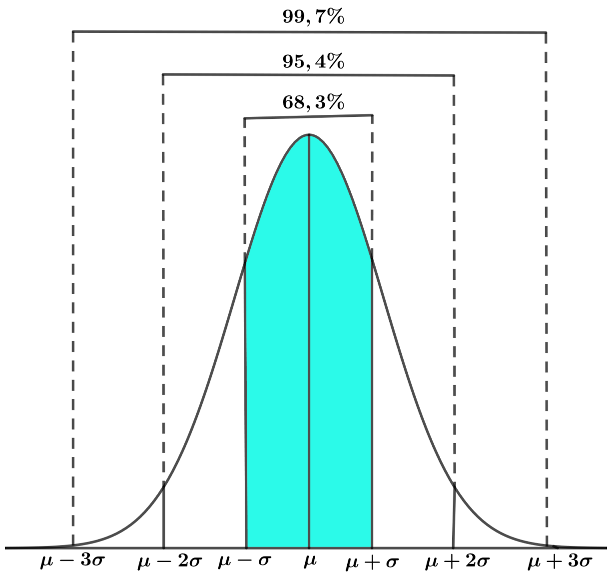


FIGURE 2.8 – Répartition des données dans différents intervalles centrés en μ

Source: [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

Après avoir défini la loi normale, la façon de calculer $P(X \leq a)$ est renseignée dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018].

> *« Lorsqu'on connait μ et σ, on peut calculer $P(X \leq a)$ à l'aide d'une table de valeurs, d'une calculatrice ou d'un logiciel. Pour calculer $P(X > a)$, on utilise la relation $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$. Pour utiliser une table de valeurs, il faut transformer l'expression pour obtenir celle d'une loi normale centrée réduite, c'est à dire une loi de paramètres 0 et 1, notée $\mathcal{N}(0,1)$ et d'expression $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$. »*
>
> [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

La notion de variable aléatoire de loi normale centrée réduite est définie dans ce même manuel sur base d'une loi normale quelconque.

Définition 2.2.46 (Variable aléatoire de loi normale centrée réduite)

[Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]

Pour toute variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de paramètres μ et σ, la variable aléatoire $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. En effet, en se basant sur les propriétés de l'espérance et de la variance, on a

$$E(T) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}(E(X)-\mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0;$$
$$V(T) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

Il est rappelé en remarque dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] que $E(X+k) = E(X)+k$, $V(kX) = k^2V(X)$ et $V(X+k) = V(X)$. D'autre part, un lien est établi avec la notion de distribution statistique.

Une fois que la loi normale centrée réduite est définie, il est précisé dans le savoir à enseigner que des tables de valeurs sont mises à disposition pour faciliter les calculs.

Propriété 2.2.17 [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
Pour qu'une distribution statistique suive une loi normale, il faut que la moyenne, le mode et la médiane de la série statistique aient des valeurs approximativement égales et que

$$\approx 68,3\% \textit{ des données se situent dans l'intervalle } [\mu - \sigma, \mu + \sigma],$$
$$\approx 95,4\% \textit{ des données se situent dans l'intervalle } [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma],$$
$$\approx 99,7\% \textit{ des données se situent dans l'intervalle } [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma].$$

Cela suffit, en pratique, pour conclure que la loi est normale, même si théoriquement ce n'est pas une condition suffisante.

Une approximation de la loi binomiale par une loi normale est également proposée dans le savoir à enseigner.

Propriété 2.2.18 (Approximation de la loi binomiale par la loi normale)
[Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]
Une loi binomiale est caractérisée par deux paramètres : n, le nombre de répétitions d'une épreuve de Bernoulli et p, la probabilité d'un succès. Lorsque le nombre n est élevé, le calcul des C_n^k *devient fastidieux. Lorsque le nombre d'épreuves est élevé* $(n > 30)$ *et que la probabilité d'un succès est proche de* $0,5$ $(0,3 < p < 0,7)$ *on peut utiliser la loi normale de paramètres* $\mu = np$ *et* $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ *pour avoir une approximation d'une loi binomiale* $B(n,p)$.

Commentaires

À propos des variables aléatoires de loi normale, nous avons globalement relevé une différence de rigueur au niveau de la formulation des résultats.

- Des propriétés de la loi normale sont caractérisées dans le savoir à enseigner à partir de graphes.
- Lors de la définition de la loi de distribution normale dans le savoir à enseigner, la variable x ainsi que les paramètres μ et σ ne sont pas précisés alors que le savoir savant spécifie que x et μ sont des réels et σ est un réel strictement positif.
- Le manuel Espace Math [Adam et Lousberg, 2012] propose uniquement l'approximation de la loi binomiale au moment d'évoquer la loi normale. En revanche, les deux versions de CQFD [Van Eerdenbrugghe et Bousson, 2011] et [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] proposent cette approximation comme résultat supplémentaire à ceux liés à la loi normale. Nous pouvons de plus rencontrer dans le savoir savant l'approximation par la loi de Poisson. Cette dernière n'apparait pas dans les référentiels.
- Alors que des intervalles de répartition de données statistiques sont précisés dans le savoir à enseigner, le savoir savant ne les renseigne pas. Ce dernier renseigne néanmoins que les lois normales interviennent également dans les études statistiques.
- Comme dans la loi uniforme, l'espérance mathématique et la variance d'une loi normale sont développées au moyen d'un exemple ou d'un exercice. Seule une définition générale est donnée dans le savoir savant.
- Le théorème central limite est considéré comme l'un des résultats principaux dans le savoir savant mais il n'est pas vu dans l'enseignement secondaire.
- Dans les deux types de savoir, le changement de variables pour passer d'une loi normale quelconque à une loi centrée réduite est effectué.
- Les deux savoirs mentionnent qu'une fois μ et σ connus, nous sommes capables de déterminer une probabilité à l'aide d'une table de valeurs.

2.3 Conclusion

Maintenant que nous avons parcouru et comparé les notions de probabilités, de variables aléatoires et de lois de probabilité, intervenant à la fois dans le savoir savant et dans le savoir à enseigner, nous pouvons mettre en évidence les principales différences relevées.

Premièrement, nous avons remarqué lors de la lecture des références du savoir savant que les résultats sont développés plus en profondeur et proviennent de plusieurs domaines des mathématiques tels que l'analyse avec la notion de suites ou la théorie des ensembles. De plus, certains concepts permettent d'établir des liens avec diverses disciplines scientifiques (économie, physique, etc.). Au vu de l'abondance des résultats proposés dans le savoir savant, nous avons remarqué que les membres de la noosphère ont établi une sélection de concepts et thèmes à aborder dans le savoir à enseigner. De plus, nous avons retrouvé beaucoup plus de démonstrations dans les références du savoir savant que dans celles du savoir à enseigner. Cependant, nous nous sommes limités aux concepts, sans leur développement.

Deuxièmement, plusieurs notions implicites et tout de même nécessaires à la compréhension interviennent dans le savoir savant. C'est notamment le cas avec la notion d'évènements équiprobables et celle d'expérience aléatoire qui ne sont pas définies explicitement dans le savoir savant.

Troisièmement, l'ensemble des définitions, propositions et théorèmes est formulé plus rigoureusement dans le savoir savant. A contrario, un langage « courant » et « moins formel » est davantage utilisé dans le savoir à enseigner. Certains résultats manquent parfois de précision. De plus, des différences d'appellation et de notation peuvent être soulevées entre les deux savoirs.

Quatrièmement, nous avons constaté dans le savoir savant un intérêt quant à l'écriture des noms des mathématiciens à l'origine des résultats énoncés, ainsi qu'à leur contexte historique. En ce qui concerne le savoir à enseigner, de brèves remarques historiques sont parfois présentes.

Cinquièmement, les notions ne sont pas abordées de la même façon dans les deux savoirs. En effet, lors de la lecture des manuels, nous avons observé qu'elles sont introduites au moyen d'explorations et d'exemples alors qu'elles sont directement énoncées dans le savoir savant. En outre, des tableaux comparatifs et de synthèse figurent dans le savoir à enseigner, ainsi qu'un nombre plus élevé de schémas et graphiques.

Suite à la description des différentes notions et de l'analyse que nous en avons ressortie, l'objectif dans la suite est de proposer des hypothèses pertinentes quant aux difficultés des enseignants à transmettre ces notions.

Chapitre 3

Hypothèses relatives aux difficultés de l'enseignement des probabilités

Maintenant que nous avons dressé le descriptif des notions de probabilité, de variables aléatoires et de lois de probabilité, nous sommes en mesure de déceler d'éventuelles difficultés rencontrées par les enseignants lors de la transposition didactique. La formulation d'hypothèses relatives à ces difficultés intervient dans ce chapitre. Cette étape de formulation du problème sera essentielle dans la suite pour proposer diverses pistes de solutions.

3.1 Décalage entre deux types de savoir

Le chapitre précédent nous a permis de mettre en évidence des différences qui montrent un certain décalage entre le savoir savant et le savoir à enseigner. Ce décalage attire notre attention sur la formation d'un enseignant sorti de l'université avec un master en sciences mathématiques. Nous nous posons dès lors la question de déterminer où se situent les connaissances de l'enseignant entre ces deux savoirs.

En vue d'apporter des éléments de réponse, nous avons mis en parallèle les notions définies dans les références du savoir savant en probabilité et celles figurant dans les cours d'université [1]. Une assez grande proximité en termes de contenu se remarque. De plus, lors de notre recherche des références du savoir savant, nous avons remarqué que la plupart d'entre elles correspondent à des notes de cours retranscrites et publiées. Nous en déduisons que l'enseignant possède un rapport plus proche du savoir savant que du savoir à enseigner, à l'obtention de son diplôme.

Sur base de cette déduction et du décalage constaté, l'enseignant dispose-t-il de tous les outils nécessaires pour enseigner les notions de probabilité dans le secondaire ?

Avant toute chose, il est important que l'enseignant comprenne sa matière pour pouvoir la transmettre. Il doit prendre suffisamment de recul dans le but de répondre correctement aux questionnements et réflexions de ses élèves. Durant son cursus universitaire, le futur enseignant acquiert un ensemble de compétences touchant de nombreux domaines des mathématiques (analyse, algèbre, statistiques, etc.). Il détient alors suffisamment de connaissances pour comprendre les notions de probabilité et pour construire des liens entre les différentes matières. Néanmoins, cet apport de connaissances peut constituer un obstacle au moment d'expliquer des concepts basiques. Par exemple, les étudiants ne disposent pas toujours des mêmes automa-

1. Nous avons consulté les cours de probabilités de l'université de Namur [Hardy, 2020a], [Hardy, 2020b] et ceux de l'université de Mons [Grosse-Erdmann, 2020].

tismes que l'enseignant au moment de résoudre des exercices ou lors de la construction d'une démonstration. Il se peut alors que le professeur ne comprenne plus le point de vue de l'élève ou n'arrive plus à se mettre à sa place. L'étudiant, n'ayant pas le même bagage de savoirs que son enseignant, n'accède pas aussi facilement à l'appropriation des concepts et des matières liées. Par conséquent, une première difficulté rencontrée par l'enseignant est de comprendre les conceptions de ses élèves et d'anticiper leurs difficultés.

De plus, comme nous l'avons observé précédemment, le savoir enseigné à l'université recherche avant tout un degré d'abstraction élevé menant à des généralisations. Prenons par exemple le cas de la définition de probabilité d'un évènement. Ce concept est défini au moyen des notions d'algèbre, de σ-algèbre et de mesure alors que dans le savoir à enseigner, aucun lien avec la théorie de la mesure n'est établi. Par ailleurs, en ce qui concerne les objectifs poursuivis dans les référentiels de l'enseignement secondaire, nous remarquons une plus forte tendance à contextualiser et à étudier des phénomènes de la vie courante. La contextualisation et l'interprétation des notions sont certes présentes à l'université mais dans une moindre mesure que dans le secondaire. Elles représentent donc une deuxième difficulté pour l'enseignant.

Le phénomène de simplification des notions auquel les enseignants sont confrontés peut engendrer une troisième difficulté. En effet, dans le chapitre précédent, nous avons remarqué que les définitions, théorèmes et propriétés sont réécrits de manière simplifiée dans le savoir à enseigner, c'est-à-dire avec peu de formalisation, des modifications de notations et l'emploi d'un langage courant. Un processus de transformation devient nécessaire pour les rendre accessibles tout en conservant l'essence même de ceux-ci.

Une quatrième difficulté émerge du statut des concepts enseignés. Ce statut a été mis en évidence par R. Douady dans [Douady, 1993] et se place dans le cadre de la dialectique outil-objet. Celle-ci part du principe que tout concept peut être considéré en tant qu'objet ou en tant qu'outil selon la situation où il apparait. D'une part, la prise en compte des concepts comme objet permet l'organisation du savoir et l'accès direct à celui-ci. Dans ce cas, les concepts sont privés de tout contexte. D'autre part, l'utilisation de concepts vus comme outil vise l'aspect fonctionnel de ces derniers et non plus le savoir en tant que tel. Ils interviennent dans la résolution de problèmes et dépendent fortement du contexte dans lequel ils se trouvent. Par conséquent, l'enseignant dans sa classe est sans cesse confronté à cette dialectique et donc à ces changements de statut, ce qui peut le placer dans une situation inconfortable. Certains résultats en probabilité sont par exemple difficilement justifiables pour un niveau secondaire car les étudiants ne disposent pas encore de toutes les connaissances nécessaires. C'est le cas notamment avec la loi normale. En effet, pour approximer la loi binomiale par la loi normale, le théorème de Moivre-Laplace est simplement utilisé comme outil. Par ailleurs, les tables de valeurs en probabilité permettent de retrouver des résultats liés à la fonction de répartition de cette loi sans calcul intermédiaire. Son expression ne figure d'ailleurs pas dans les manuels à destination de l'enseignant. De même, la fonction de densité de la loi normale est donnée sans justification en raison du calcul intégral trop complexe.

A la Section 2.2.1.2, nous nous sommes rendu compte de l'existence de deux courants en probabilité. Nous remarquons donc en dernière analyse qu'un professeur ayant reçu un enseignement subjectiviste de la probabilité durant son parcours universitaire se trouverait encore plus en difficulté au moment de transmettre les notions du savoir à enseigner, ces dernières appartenant en effet au courant objectiviste.

3.2 Différence de raisonnement

A la section précédente, nous avons mis en lumière des difficultés liées à la place des connaissances de l'enseignant entre le savoir savant et le savoir à enseigner. Dans cette section, nous relevons des obstacles et difficultés survenant au moment d'enseigner les probabilités.

Selon Brousseau dans [Brousseau, 2003], un obstacle est une connaissance antérieure et valide dans un certain contexte mais inappropriée dans une nouvelle situation. Lorsque l'élève ne surmonte pas l'obstacle, des erreurs se reproduisent et persistent. Il est nécessaire que l'élève en prenne conscience pour ajuster, compléter, voire rejeter ses connaissances et ainsi, franchir l'obstacle. De cette façon, l'étudiant acquiert des connaissances adéquates à la nouvelle situation.

Brousseau distingue trois types d'obstacles.

- Les obstacles épistémologiques sont liés au savoir en tant que tel et à son histoire.
- Les obstacles didactiques dépendent des choix d'enseignement effectués dans un cadre éducatif. Ils résultent de la transposition didactique et des procédés suivis par l'enseignant.
- Les obstacles d'origine ontogénique proviennent des limitations neurophysiologiques de l'apprenant. Par exemple, Piaget met en évidence que la conservation des quantités numériques n'est pas acquise avant l'âge de 7 ans. Il a montré au travers de ses expériences que les enfants confondent le nombre de jetons et l'espace pris par l'ensemble des jetons. Ces enfants ne sont en effet pas encore capables de distinguer le spatial et le numérique.

Nous pouvons lire dans [Brousseau, 2003] qu'une difficulté intervient quant à elle dans une situation d'apprentissage au moment d'accomplir une tâche particulière. Elle caractérise la subtilité et la complexité d'un exercice.

En regard de ces deux définitions, Brousseau ajoute qu'un obstacle n'est pas une difficulté. Il précise que l'obstacle relève d'une connaissance, voire d'un surplus de connaissances, ce qui n'est pas le cas pour une difficulté. Cette dernière apparait plutôt de manière ponctuelle. Par exemple, un exercice ne causant pas de blocage à la compréhension peut contenir un grand nombre de difficultés. Il n'amène toutefois pas forcément d'obstacle. D'après Brousseau dans [Brousseau, 1998], il arrive malgré tout qu'un obstacle puisse se manifester sous la forme de plusieurs difficultés qui peuvent être considérées isolément.

Par conséquent, nous estimons qu'il est important que l'enseignant prenne conscience des différents obstacles et difficultés pouvant être rencontrés par les élèves au moment de construire son cours. C'est pourquoi dans la continuité de cette section, nous mettons en évidence différents obstacles propres à l'enseignement des probabilités et variables aléatoires.

3.2.1 Notion de hasard

Comme soulevé dans [Commission inter-IREM, 1997], un premier obstacle d'origine épistémologique peut survenir de la complexité liée au hasard. Tout le monde n'est pas convaincu de son existence et du sens que nous lui attribuons. De plus, cette notion est étroitement liée à nos croyances, ce qui explique que nous n'avons pas tous les mêmes représentations des phénomènes incertains. D'ailleurs, si nous nous intéressons aux différentes interprétations données au hasard, nous pouvons lire dans [Batanero *et al.*, 2005] que la pensée dominante du monde scientifique du XIX^e^ siècle est celle du déterminisme de Laplace. Cette dernière associe le hasard à l'expression de notre ignorance :

> « *Nous devons considérer l'état actuel de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui doit suivre.* » Traduit de [Batanero *et al.*, 2005]

Dès lors, les individus supposent que la réalisation de tout évènement est la conséquence d'un d'acte ou d'un fait.

Néanmoins, cette conception du hasard n'est pas unique, il en existe d'autres. En effet, certaines personnes considèrent que notre destin est déjà tracé, avec pour cause des forces divines telles qu'un Dieu ou un esprit surnaturel. Pour d'autres, le hasard est omniprésent et représente un obstacle au moment d'établir des prédictions. Tout ce que nous n'arrivons pas à expliquer serait donc apparenté au hasard, comme par exemple des phénomènes sensibles à des conditions initiales, la théorie du big-bang ou encore celle de Darwin.

De plus, les élèves ont des conceptions particulières liées à la nature du hasard. Ces dernières engendrent un deuxième obstacle plutôt d'ordre épistémologique. En effet, les auteurs de [Commission inter-IREM, 1997] mettent en évidence deux raisonnements particuliers lors de la répétition d'une même épreuve aléatoire. D'une part, les élèves pensent qu'un évènement qui ne s'est pas produit depuis longtemps va se réaliser. D'autre part, ils considèrent que si un évènement s'est produit plusieurs fois, alors il va continuer à se réaliser. La première idée des élèves est que le hasard compense. Ceux-ci considèrent en fait l'équiprobabilité des évènements. Suivant cette conception, ils associent la réalité à une loi uniforme. Or, c'est la loi normale qui traduit le plus de phénomènes et de situations réelles. La deuxième conception des élèves se traduit par la loi des séries. Cette dernière généralise l'expression de la vie courante : « Jamais deux sans trois ». De plus, elle se retrouve dans plusieurs situations de la vie quotidienne. Par exemple, si au cours d'une journée, nous avons déjà vécu plusieurs faits désagréables, nous avons tendance à croire que les mésaventures vont continuer à se produire. De même, comme expliqué dans [Laurent et al., 2017], si nous lançons une pièce équilibrée et que nous obtenons trois fois de suite « face » alors nous pouvons croire que le quatrième lancer donnera à nouveau « face » pour continuer la série. Cependant, si nous nous plaçons dans l'idée que le hasard compense, nous aurions plutôt tendance à penser qu'il est plus probable d'obtenir « pile » au quatrième lancer pour combler le manque de « pile ». Ces deux conceptions, bien que contradictoires, sont fortement présentes dans les idées des élèves. Lorsque nous jouons au Lotto, nous sommes souvent confrontés à ce type de pensées au moment de choisir les numéros susceptibles de sortir. Pourtant, ces conceptions de la loi des grands nombres ne sont pas correctes et ne représentent pas la réalité.

En lien avec nos modes de pensée, le domaine des probabilités soulève également des obstacles que nous qualifierions de psychologiques. En effet, nous lisons dans [Commission inter-IREM, 1997] que lorsqu'il s'agit de calculer des probabilités, nous confondons parfois la gravité d'un événement et la probabilité qu'il se produise. C'est ce qui explique par exemple que certains évaluent le risque d'avoir un accident en avion plus élevé que celui d'en faire un en voiture même si les chiffres prouvent le contraire. Ces biais de pensée dépendent de nos expériences personnelles et de nos émotions (positives ou négatives) ressenties à chaque instant. En fonction de l'intensité de celles-ci, nos perceptions se déforment par rapport à la réalité.

Nous repérons un autre obstacle de nature didactique lorsque les étudiants se retrouvent dans des situations sans information précise sur le résultat attendu ou sur la méthode à utiliser. Dans ce cas, selon Jean-Claude Girard dans [Commission inter-IREM, 1997], ils ne considèrent que deux résultats possibles avec la même probabilité : il y a une chance sur deux que l'évènement se produise, il y a une chance sur deux qu'il ne se réalise pas.

Les auteurs de [Batanero *et al.*, 2005] soulignent qu'il est primordial pour un enseignant de prendre conscience de ces différentes interprétations puisqu'elles déterminent implicitement les réponses des étudiants dans des situations d'apprentissage en probabilité. Bien que l'incertitude ne soit pas définie explicitement dans les contenus à enseigner, Jean-Claude Girard remarque dans [Commission inter-IREM, 1997] qu'il est parfois nécessaire d'aborder le hasard en pensant à des activités autour de phénomènes aléatoires physiques, biologiques, sociaux, etc. De cette manière, les élèves peuvent percevoir la forte présence de variabilité des résultats. Nous pouvons à ce stade remarquer que ces contenus n'interviennent pas explicitement dans la formation principale de l'enseignant. Ce dernier n'est donc pas préparé à enseigner cette notion complexe qu'est le hasard.

3.2.2 Notion de probabilité

Dans [Commission inter-IREM, 1997], les auteurs relèvent des difficultés au moment de définir la probabilité. Il est en effet question d'admettre une mathématisation de l'incertitude et donc son existence.

Tout d'abord, les approches laplacienne et fréquentiste sont fortement liées puisqu'elles définissent la probabilité à partir de la loi des grands nombres, une loi non définie explicitement dans l'enseignement secondaire. Les auteurs de [Commission inter-IREM, 1997] précisent que cette loi se démontre à partir des propriétés des probabilités, créant alors un obstacle que nous identifions d'épistémologique puisque la notion de probabilité se définit par elle-même. Une forme de circularité se crée. Par ailleurs, une difficulté survient dans l'approche fréquentiste. En effet, comme la probabilité se définit exclusivement sur base de la répétition d'évènements, la notion de limite apparait. Or cette limite n'en est pas vraiment une puisqu'en répétant plusieurs fois l'expérience, nous ne sommes jamais certain d'atteindre une valeur constante. Cet obstacle et cette difficulté sont plutôt rencontrés par l'enseignant car ils n'apparaissent pas explicitement dans le savoir à enseigner.

Ensuite, dans l'histoire des probabilités, ce sont les axiomes proposés par Kolmogorov en 1933 qui ont permis la construction d'une théorie formelle des probabilités, à la fois cohérente et non contradictoire. De la même manière que la géométrie euclidienne s'est construite autour d'un concept aussi abstrait que celui de point, l'axiomatisation fournie par Kolmogorov s'appuie principalement sur la notion de hasard. De fait, la théorie des probabilités est constituée d'un ensemble de règles bien fondées qui permettent d'expliquer l'incertitude tout en se détachant de cette notion. Kolmogorov précise d'ailleurs que

> « *la probabilité n'a de sens que si elle est « mathématique », au sein d'un modèle décrivant les lois du hasard.* »[Henry, 1999]

Par conséquent, le concept de probabilité existe uniquement parce qu'il fait partie d'une théorie mathématique qui explique des situations aléatoires. Un obstacle épistémologique et didactique survient alors. En effet, comme indiqué dans [Commission inter-IREM, 1997], la seule justification des propriétés enseignées serait de dire que la théorie des probabilités fonctionne bien et qu'elle traduit un grand nombre de phénomènes aléatoires.

3.2.3 Taille d'un échantillon

Nous identifions un obstacle épistémologique et didactique lorsque les élèves ne considèrent pas la taille d'échantillon. En effet, comme soulevé dans [Laurent et al., 2017], ils ne prennent pas toujours en compte les effectifs en jeu. Par exemple, la probabilité d'obtenir trois fois

« face » sur quatre lancers d'une pièce de monnaie est considérée comme équivalente, d'après les élèves, à la probabilité d'obtenir 300 fois « face » sur 400 lancers. Pourtant, ces probabilités sont bien différentes. Les élèves s'arrêtent uniquement au rapport entre le nombre d'apparitions de « face » et le nombre de lancers. Dans cet exemple, le rapport est de $\frac{3}{4}$ dans les deux cas.

3.2.4 Décomposition d'une expérience aléatoire

Comme relevé par les auteurs de [Batanero *et al.*, 2005], Piaget et Inhelder ont montré qu'un individu n'est pas toujours capable d'un point de vue cognitif de diviser une expérience aléatoire en différentes étapes comme c'est le cas lorsqu'il doit déterminer un type de combinatoire approprié à une expérience aléatoire. Il rencontre alors des difficultés pour construire un diagramme de Venn, des arbres ou encore des tableaux. Cela peut poser problème puisque ces outils sont fortement utilisés dans le domaine des probabilités.

3.2.5 Notions d'indépendance et de probabilité conditionnelle

Les auteurs de [Batanero *et al.*, 2005] rappellent qu'il a fallu attendre le milieu du XVIII^{e} siècle avant que la notion d'indépendance soit rendue explicite. Initialement une vision intuitive était développée :

> « *Deux évènements sont indépendants s'il n'y a pas de raison de penser que l'un d'entre-eux peut avoir une influence sur l'autre* » Traduit de [Batanero *et al.*, 2005].

Avec les axiomes de Kolmogorov, l'indépendance d'évènements se définit par une règle de multiplication. Nous repérons alors un obstacle de nature épistémologique lorsque les étudiants sont confrontés à des problèmes de probabilités conditionnelles. Une confrontation entre définition formelle et intuition se produit. En effet, comme indiqué dans [Batanero *et al.*, 2005], certains évènements peuvent être indépendants du point de vue probabiliste sans l'être intuitivement, ou inversement. Lançons par exemple un dé équilibré deux fois de suite et considérons deux évènements : « la somme des résultats vaut 7 » et « le résultat du premier dé est 4 ». A première vue, ces évènements semblent dépendants puisqu'avoir un quatre au premier dé semble avoir une influence sur la somme des résultats. Or, ils ne le sont pas. En effet, la probabilité de l'intersection des deux évènements coïncide avec le produit des probabilités de ces derniers. Dans ces deux cas, la probabilité est égale à $\frac{1}{36}$ et les évènements sont indépendants. La règle de multiplication s'oppose donc à l'intuition.

De plus, une difficulté peut être rencontrée dans des calculs de probabilités conditionnelles lorsque nous sommes confrontés au phénomène Falk. Dans [Laurent et al., 2017], il est précisé que ce phénomène apparait suite à une inversion de la chronologie cause-effet. Prenons par exemple une urne dans laquelle figurent quatre boules dont deux sont rouges et deux sont noires. Répétons deux fois de suite l'expérience aléatoire de tirer une boule sans remise. Les tirages sont alors dépendants. Dans une première situation, il est annoncé que la première boule extraite est noire et il est demandé de donner les probabilités du second tirage. La probabilité d'extraire une boule rouge au deuxième tirage est donc de $\frac{2}{3}$ et celle de tirer une boule noire est de $\frac{1}{3}$. Généralement, les réponses sont trouvées correctement. Dans une deuxième situation, il est demandé de déterminer les probabilités relatives au premier tirage en connaissant la boule extraite au deuxième tirage. Les auteurs de [Laurent et al., 2017] expliquent que dans cette seconde situation, les personnes donnent souvent des réponses erronées puisque l'information n'est pas donnée dans un ordre chronologique, ce qui requiert une plus grande attention puisqu'il faut penser à inverser l'arbre de probabilité.

3.2.6 Notion d'évènement impossible

Nous pouvons lire dans [Commission inter-IREM, 1997] qu'un obstacle apparait lorsqu'un évènement qualifié d'impossible se produit. Si nous regardons à la définition d'un tel évènement dans le savoir à enseigner, nous pouvons comprendre les difficultés rencontrées par les élèves. En effet, dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018], un évènement impossible est d'abord défini comme un événement ne se réalisant jamais. Ensuite, une propriété précise qu'un événement est impossible si et seulement si la probabilité qui lui est associée est nulle. Or dans certaines situations, l'enseignant s'attend à ce que les élèves acceptent qu'un évènement de ce type puisse se produire, ce qui peut être perçu comme contradictoire du point de vue des élèves. Par exemple, la réalisation d'un évènement impossible survient lorsque nous calculons la probabilité qu'une variable aléatoire continue prenne une valeur exacte. Si nous considérons une variable aléatoire représentant la taille, en cm, des adolescents dans une école, alors la probabilité qu'un adolescent mesure 158 cm est nulle et donc l'évènement associé est impossible par propriété. Pourtant, il pourrait exister un adolescent mesurant 158 cm dans cette école. Cette contradiction, observée par les élèves, constitue un obstacle épistémologique. La raison de ce dernier provient de la théorie de la mesure et plus particulièrement de la notion de probabilité presque sûre qui n'est pas définie dans le secondaire. Dans l'exemple ci-dessus, cette probabilité est en fait nulle presque sûrement parce que nous sommes dans un cas continu avec un nombre infini et non dénombrable de valeurs. Il ne s'agit donc pas d'un évènement impossible mais bien d'un évènement presque impossible. L'enseignant connaissant des concepts de la théorie de la mesure se retrouve en difficulté lorsqu'il doit expliquer ce phénomène. Il dispose effectivement d'un bagage de savoirs conséquent par rapport à celui des élèves. Comme nous l'avons expliqué dans la première hypothèse à la Section 3.1, des processus de simplification et des stratégies différentes doivent dès lors être appliqués pour donner des justifications. Dans le cas discret, cette question ne se pose pas.

Il existe également des situations où les probabilités sont « très petites » et donc négligeables. Dans ce cas, elles sont considérées comme nulles mais les évènements associés ne sont pas pour autant impossibles, ce qui nous amène à penser à une autre difficulté. Dans [Commission inter-IREM, 1997], il est indiqué que Borel distingue les évènements impossibles à l'échelle humaine (ceux dont la probabilité est inférieure à 10^{-15}), impossibles à l'échelle cosmique (ceux dont la probabilité est inférieure à 10^{-50}) et impossibles à l'échelle supersonique (ceux dont la probabilité est inférieure à 10^{-110}). De plus, Borel remarque une nuance entre impossibilité mathématique, nécessitant un seuil décisionnel et impossibilité physique. Dans son célèbre exemple avec les singes dactylographes [2], il est impossible de voir se réaliser l'expérience à notre échelle temporelle. En effet, il faudrait des milliards de siècles pour que les singes dactylographient complètement et sans erreur les oeuvres de Shakespeare.

3.2.7 Expressions de la vie courante

Nous reconnaissons un obstacle d'origine épistémologique lié à des confusions créées par des expressions de la vie courante. Dans les obstacles précédents, nous en avons déjà abordé une : « Jamais deux sans trois ». Un autre exemple de la vie courante apparait quand nous parlons de hasard et de situations aléatoires. En effet, ces derniers font souvent référence à l'équiprobabilité dans les discours. Considérons les deux situations suivantes dans lesquelles les termes « hasard » et « aléatoirement » sont associés à l'équiprobabilité :

2. Cet exemple est plus communément connu sous le nom du paradoxe du singe savant. Il s'intéresse à la probabilité qu'un singe, tapant au hasard différentes touches d'une machine à écrire, reproduise l'entièreté des oeuvres de Shaekespeare.

« *Chaque jour, la mère de Rose arrive à la maison à 12 h et repart à 12 h 30. Rose arrive aléatoirement entre 11 h 45 et 13 h 15 et reste 5 min avant de repartir.* »[Loi uniforme, 2021] [3]

« *Matthias et Alban ont rendez-vous à la gare entre 18 h et 19 h. Ils arrivent indépendamment et au hasard entre 18h et 19h.* »[Loi uniforme, 2021]

Dans ces deux exemples, l'auteur amène des confusions chez les élèves puisque les termes « hasard » et « équiprobabilité » ont été pris l'un pour l'autre. En effet, l'auteur fait allusion à la loi uniforme.

3.2.8 Rapport à la réalité

Le domaine des probabilités est une des parties des mathématiques où nous nous intéressons fortement à la réalité. L'élève est en effet directement confronté à des expériences telles que le lancer de dés, le tirage de cartes, etc. Certains enseignants considèrent d'ailleurs, d'après les auteurs de [Batanero *et al.*, 2005], que les probabilités sont un domaine à part puisqu'il ne s'agit que de jeux de chances et de hasard. Cet accès au réel crée toutefois des obstacles de nature épistémologique liés au processus de modélisation.

Tout d'abord, afin de représenter la réalité, il est nécessaire de déterminer un modèle adéquat. Cependant, un modèle n'est jamais totalement valide. Il s'agit d'une idéalisation et d'une simplification de la réalité sous certaines hypothèses. Ces caractéristiques du modèle constituent un obstacle didactique car certains élèves croient travailler sur la réalité alors qu'ils sont déjà dans le modèle. Prenons l'expérience aléatoire de la somme des résultats du lancer de deux dés. Jean-Claude Girard remarque dans [Commission inter-IREM, 1997] que la façon de tenir compte des résultats « 5+6 » et « 6+5 » pose question pour beaucoup d'élèves. Faut-il les considérer comme identiques ou différents ? Dans cet exemple, certains élèves n'arrivent pas à passer outre la situation réelle et pensent qu'il y a plusieurs réalités suivant que les dés sont de la même couleur ou non. Pourtant, il s'agit de la même réalité puisque la somme des résultats ne change pas. Il est difficile pour un enseignant de leur faire comprendre qu'il existe plusieurs modèles mais une seule réalité. Comme expliqué dans [Batanero *et al.*, 2005], Heitele indique que la simulation peut servir d'intermédiaire entre le réel et le modèle mathématique. Elle peut contribuer à une amélioration de la pensée intuitive en probabilité, de la démarche suivie lors de la modélisation d'un phénomène et de la distinction entre modèle et réalité.

Nous pouvons lire dans [Commission inter-IREM, 1997] qu'une difficulté d'apprentissage liée à la modélisation survient dans les énoncés d'exercices en probabilité. En effet, l'enseignant les considère fort systématiques ou ressemblants puisqu'il perçoit des éléments implicites présents dans les énoncés. A contrario, les élèves les trouvent tous différents car la formulation des exercices n'est pas forcément claire pour eux. Par exemple, nous pouvons retrouver les deux situations proposées ci-dessous dans le manuel [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] :

« *La probabilité qu'un certain caractère héréditaire se transmette des parents aux enfants est de 58%. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'enfants ayant ce caractère dans une famille de 5 enfants.*

a. *Quelle est la probabilité que ce caractère héréditaire soit présent :*

   1) *chez tous les enfants ;*

3. Le site que nous avons consulté ne renseignait aucun auteur. C'est pourquoi nous avons indiqué uniquement le titre de la page internet.

2) *chez deux enfants ;*

3) *chez au moins trois enfants.*

b. *Calculez l'espérance mathématique. Que représente-t-elle dans cette situation ?* »

« *On lance 20 fois une pièce de monnaie équilibrée. La variable aléatoire X désigne le nombre de faces obtenu au cours de ces lancers.*

a. *Quelle est la probabilité de la variable X ?*

b. *Calculer la probabilité d'obtenir 12 fois « face » au cours de ces lancers.*

c. *Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat.* »

Dans ces deux situations, l'enseignant identifie facilement un problème qui fait référence à une loi binomiale, ce qui n'est pas forcément le cas pour un étudiant. Ce dernier ne remarque pas directement la présence d'un schéma de Bernoulli derrière les 5 enfants ou les 20 lancers. Le changement de contexte n'amène pas de difficulté chez l'enseignant alors que l'étudiant peut en rencontrer en raison d'éléments cachés par la contextualisation.

3.3 Conclusion

Pour conclure, nous avons identifié deux hypothèses principales relatives aux difficultés de l'enseignement des probabilités. La première est liée au décalage entre le savoir de l'enseignant sorti de l'université et le savoir à enseigner. La seconde concerne une différence de raisonnement en probabilité par rapport aux mathématiques classiques.

Concernant la deuxième hypothèse, nous avons mis en évidence plusieurs obstacles. De ces derniers, nous déduisons que le domaine des probabilités nécessite un raisonnement particulier par rapport aux autres branches des mathématiques. Tout d'abord, d'un point de vue épistémologique, nous nous sommes rendu compte que la question du hasard occupe une place importante en probabilité. D'ailleurs, aussi bien l'enseignant que les élèves disposent de conceptions préalables par rapport à cette notion de hasard. Des obstacles d'ordre didactique surviennent également lorsque l'enseignant se retrouve face à des théorèmes non justifiés ou des formulations simplifiées, notamment au moment de définir une probabilité. Ensuite, les modèles probabilistes nous permettent de décrire, de simplifier et d'interpréter des situations réelles où le hasard intervient et où nos perceptions peuvent nous faire défaut, amenant aussi des obstacles.

Le chapitre qui suit met en lumière les différents obstacles soulevés lors de la résolution d'exercices particuliers. L'objectif principal est que l'enseignant prenne conscience de ces difficultés et obstacles au moment de résoudre des problèmes en probabilité.

Chapitre 4

Réflexions didactiques sur des exercices en probabilité

Au cours de ce chapitre, nous analysons des exercices susceptibles d'être rencontrés dans l'enseignement secondaire des probabilités. Nous souhaitons confronter l'enseignant aux obstacles mis en évidence dans le chapitre précédent afin qu'il en prenne conscience au travers d'exercices scénarisés. De cette manière, plusieurs réflexions didactiques peuvent en ressortir. L'objectif de ce chapitre est dès lors de se concentrer uniquement sur les obstacles relevés et les raisonnements qui surviennent lors des résolutions.

Une fois ces exercices commentés, nous souhaitons que l'ensemble de notre analyse soit accessible aux jeunes enseignants afin de les aider dans leur carrière professionnelle. C'est pourquoi un site Internet a été créé. Sur ce site, nous aimerions élaborer un dispositif de formation à destination de l'enseignant pour l'UAA des variables aléatoires et lois de probabilité. En ce qui concerne la mise en scène des exercices, nous partons d'une situation de départ et nous invitons progressivement l'enseignant à réfléchir sur base de différentes questions. Afin de respecter une certaine structure, nous avons fait le choix des trois questions reprises ci-dessous et communes à tous les exercices qui s'y prêtaient.

1. Que pensez-vous que les élèves répondraient spontanément ?
2. Mathématiquement, comment procéderiez-vous pour résoudre l'exercice ?
3. Pensez-vous que tous les élèves procéderaient de la même façon ?

La première question demande à l'enseignant de se mettre à la place de l'élève et d'imaginer les différentes réponses dues à l'intuition qui peuvent surgir au sein de sa classe. La deuxième question met en évidence ce que nous pensons que l'enseignant pourrait répondre en tant que mathématicien. La troisième question élargit les différents raisonnements qui sont susceptibles d'être suivis et auxquels l'enseignant n'aurait pas forcément pensé. En plus de ces trois questions, certains exercices contiennent des questions supplémentaires et plus précises dans le but d'approfondir la réflexion. Le site est construit de telle sorte que ces questions apparaissent de manière progressive pour ne pas influencer le lecteur sur les réponses et les réflexions que nous lui apportons.

4.1 Exercices commentés

4.1.1 Daltoniens

5% *des hommes sont daltoniens. Quelle est la probabilité que sur cent hommes, il y ait cinq daltoniens ?* Inspiré de [Commission inter-IREM, 1997]

- **Que pensez-vous que les élèves répondraient spontanément ?**

A la lecture de l'énoncé, l'intuition de certains élèves pourrait les amener à raisonner de deux façons différentes. D'une part, une partie des élèves pourraient être tentés de répondre une probabilité de 5%. Cette réponse est incorrecte et provient de la similarité entre le pourcentage renseigné par l'hypothèse et les nombres apparaissant dans la question. Cette erreur résulte en fait d'une confusion entre la fréquence des daltoniens et la probabilité d'obtenir cinq daltoniens sur 100 hommes. D'autre part, quelques-uns pourraient proposer une probabilité égale à un comme solution. En effet, si 5% des hommes sont daltoniens alors il est naturel de penser qu'obtenir cinq daltoniens parmi 100 hommes est une certitude. Or, ce n'est pas le cas. C'est la formulation de l'énoncé qui amène cette confusion et qui induit en erreur. En changeant le pourcentage, l'obstacle ne serait peut-être pas apparu. Ce pourcentage est une variable didactique puisque c'est un élément facilement modifiable par l'enseignant et qui incite l'élève à raisonner différemment.

- **Mathématiquement, comment procéderiez-vous pour résoudre l'exercice ?**

Les enseignants se tourneraient généralement vers la modélisation de la situation à l'aide des lois de probabilité. Ils repéreraient la présence d'une loi binomiale. En effet, il est question de répéter une épreuve de Bernoulli qui consiste dans ce cas à prélever un daltonien ou non cent fois. Par conséquent, un schéma de Bernoulli se dessine. Pour répondre à la question, ils définiraient habituellement une variable aléatoire X représentant le nombre de daltoniens. Cette dernière suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 5\%$, où n désigne le nombre de répétitions de l'épreuve de Bernoulli et p la probabilité d'un succès. La probabilité d'obtenir 5 daltoniens parmi cent hommes se calcule alors comme suit :

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= C_{100}^{5} \left(\frac{5}{100}\right)^{5} \left(\frac{95}{100}\right)^{95} \\ &= 0,18. \end{aligned}$$

Les enseignants concluraient finalement qu'il y a 18% de chances d'avoir cinq daltoniens parmi 100 hommes.

- **Pensez-vous que tous les élèves procéderaient de la même façon ?**

Tous les élèves ne se rattacheraient pas directement à la loi binomiale pour représenter la situation. Certains pourraient construire un arbre de probabilité. En effet, au moment de prélever un individu dans la population, il est à chaque fois question de regarder si ce dernier est daltonien ou non, comme illustré à la Figure 4.1. Cependant, ils prendraient conscience que la construction d'un arbre à 100 étapes est fastidieuse.

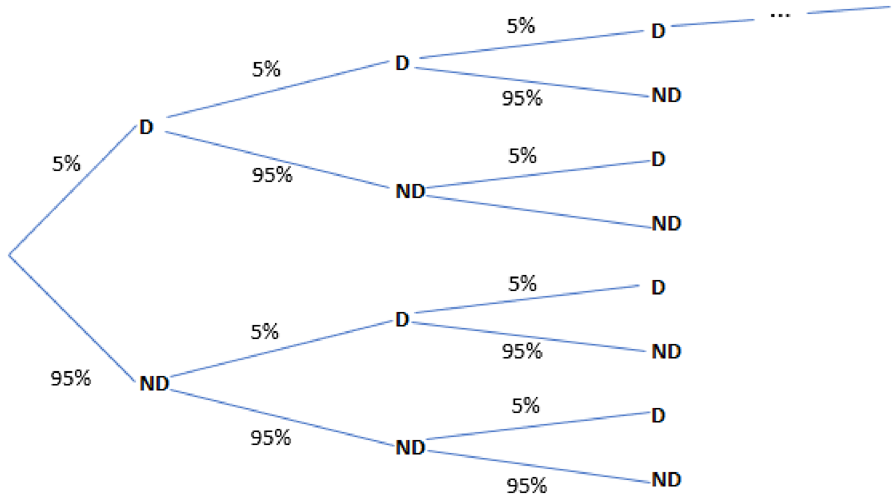


FIGURE 4.1 – Arbre représentant le tirage de cinq daltoniens parmi 100 hommes (D pour daltonien et ND pour non daltonien)

D'autres pourraient également se baser sur les raisonnements suivis en analyse combinatoire surtout si cette dernière a été enseignée récemment. Dans ce cas, ils représenteraient la situation comme ci-dessous à l'aide de 100 cases, où D désigne le tirage d'un daltonien et ND, celui d'un non daltonien.

$$\underline{D}\ \underline{D}\ \underline{D}\ \underline{D}\ \underline{D}\ \underline{ND}\ \underline{ND}\ \underline{ND}\ \underline{ND}\ \underline{ND}\ \underline{ND}\ \dots\ \underline{ND}$$

Pour considérer tous les cas possibles, ils utiliseraient la formule des permutations avec répétitions. En effet, il est nécessaire de répéter le tirage d'un daltonien cinq fois et celui d'un non daltonien 95 fois. Ils décomposeraient alors le calcul de la probabilité demandée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{5}{100}\,\frac{5}{100}\,\frac{5}{100}\,\frac{5}{100}\,\frac{5}{100}\,\frac{95}{100}\dots\frac{95}{100} + \dots + \frac{95}{100}\dots\frac{95}{100}\,\frac{5}{100}\,\frac{5}{100}\,\frac{5}{100}\,\frac{5}{100}\,\frac{5}{100} \\ &= \left(\frac{5}{100}\right)^5\left(\frac{95}{100}\right)^{95} + \dots + \left(\frac{95}{100}\right)^{95}\left(\frac{5}{100}\right)^5 \\ &= Q_{100}^{5,95}\left(\frac{5}{100}\right)^5\left(\frac{95}{100}\right)^{95}, \end{aligned}$$

où A représente l'évènement « obtenir cinq daltoniens parmi 100 hommes » et $Q_{100}^{5,95}$ désigne la formule des permutations avec répétitions donnée dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] [1].

Par cette analyse, nous voulons faire prendre conscience aux enseignants qu'il y a un décalage entre le savoir de l'enseignant et le savoir des élèves comme expliqué dans la première hypothèse à la Section 3.1. Généralement, les enseignants pensent à la loi binomiale tandis que certains élèves réfléchissent d'abord plutôt en termes de schématisation (arbre ou cases). Par ailleurs, peu importe les démarches entreprises, les solutions obtenues sont les mêmes mais certains raisonnements sont plus efficaces que d'autres. Une fois cette prise de conscience réalisée, il est alors important de faire le lien entre l'ensemble des raisonnements suivis, c'est-à-dire de reconstruire la loi binomiale à partir de l'arbre et de la

1. Nous avons repris la notation de ce manuel. Nous avons mis en Annexe la page du manuel relative aux formules de l'analyse combinatoire.

formule des permutations avec répétitions. En effet, en développant $Q_{100}^{5,95}$, les enseignants pourraient montrer aux élèves qu'il est possible de retrouver la combinaison simple C_{100}^{5} présente dans la formule de la loi binomiale :

$$\begin{aligned} Q_{100}^{5,95} &= \frac{100!}{5!95!} \\ &= \frac{100!}{5!(100-5)!} \\ &= C_{100}^{5}. \end{aligned}$$

- **Quelque soit le raisonnement suivi, l'hypothèse d'indépendance est-elle vérifiée ?**

  Puisque la construction de l'arbre et la représentation avec les cases se rapportent toutes à la loi binomiale, il est suffisant de vérifier l'hypothèse d'indépendance pour cette dernière loi. En effet, une loi binomiale s'applique dans une situation où il y a une répétition indépendante d'une même épreuve de Bernoulli. Dans cet exercice, prendre un homme et regarder s'il est daltonien ou non constitue l'épreuve de Bernoulli. Cette épreuve est répétée 100 fois. Néanmoins, l'hypothèse d'indépendance pose question. En effet, quand un homme a été observé, il est retiré du lot. Une dépendance se crée alors entre les observations puisqu'il n'en reste plus que 99. L'utilisation de la loi binomiale convient néanmoins en raison de la taille de la population par rapport à celle de l'échantillon. Comme la population mondiale est supposée dans l'énoncé, cette dernière est suffisamment grande par rapport à celle de l'échantillon pour considérer l'indépendance des évènements. Cela rejoint ce que nous avons expliqué dans l'hypothèse de la différence de raisonnement à la Section 3.2 et plus particulièrement dans le **rapport à la réalité** et dans la **notion d'indépendance**. Nous devons effectivement faire des suppositions quant à la taille de la population sur base des éléments présents dans l'énoncé pour pouvoir considérer l'indépendance des évènements.

- **Y a-t-il un sens à calculer une probabilité en regard de l'énoncé ?**

  Calculer une probabilité n'a de sens que lorsque la situation est aléatoire. Or, la formulation de l'énoncé ne fait référence explicitement à aucune notion liée au hasard. Cela entraine donc une difficulté due à des **éléments implicites** comme expliqué à l'hypothèse sur la différence de raisonnement de la Section 3.2.8. En effet, sans la présence du hasard dans le choix des cent personnes, ce n'est pas un problème probabiliste mais plutôt un exercice faisant intervenir uniquement le calcul de fréquences. Nous avons omis volontairement cette information dans le but que les enseignants se rendent compte qu'il n'est pas naturel pour les élèves de répondre à la question sans préciser qu'il s'agit d'une situation aléatoire. En revanche, certains enseignants auraient tendance à ne plus y prêter attention.

- **Comment reformuleriez-vous l'énoncé pour le rendre plus explicite ?**

  Sur base de notre analyse, voici un énoncé qui pourrait convenir :

  « 5% *des hommes de la population mondiale sont daltoniens. Quelle est la probabilité que sur cent hommes choisis au hasard, il y ait cinq daltoniens ?* »

Le fait de renseigner qu'il s'agit de la population mondiale doit faire penser au concept d'indépendance. Rien n'empêche cependant de le préciser. De même, le caractère aléatoire est bien présent et permet d'identifier un problème du domaine des probabilités.

4.1.2 Naissances

Un hôpital a en moyenne 50 naissances par jour et un autre en a 10. On s'intéresse à la fréquence où le pourcentage de naissances de garçons dépasse 60% des naissances (on suppose que, dans chaque hôpital, il y a en moyenne autant de naissances filles que de naissances garçons). Cela arrivera-t-il plus souvent dans le grand hôpital, dans le petit hôpital ou avec autant de chance dans les deux hôpitaux ? Inspiré de [Laurent et al., 2017]

- **Que pensez-vous que les élèves répondraient spontanément ?**

Comme il est supposé dans l'énoncé que la probabilité qu'une fille naisse est la même que celle d'un garçon, certains élèves pourraient avoir envie de répondre qu'il y a autant de chance dans les deux hôpitaux que le pourcentage de naissances de garçons dépasse 60% des naissances totales. Dans ce cas, c'est l'intuition des élèves qui les pousserait à raisonner de cette manière et qui les induirait en erreur. Ce raisonnement découle plus précisément de l'équiprobabilité des naissances et de la **taille de l'échantillon** qui n'est pas prise en compte comme décrit dans l'hypothèse due à la différence de raisonnement, à la Section 3.2.3. En effet, comme il y a une chance sur deux qu'une fille naisse et une chance sur deux qu'un garçon naisse, peu importe le nombre de naissances, ces élèves penseraient qu'il y a autant de chance d'avoir les mêmes pourcentages dans les deux hôpitaux. Or, ce n'est pas le cas. Ici, l'équiprobabilité des naissances les conduit à penser à l'équiprobabilité des évènements « le pourcentage de naissances de garçons dépasse 60% des naissances totales pour le grand hôpital » et « le pourcentage de naissances de garçons dépasse 60% des naissances totales pour le petit hôpital ». De plus, en raisonnant de cette façon, ils ne garderaient en tête que la probabilité égale à $\frac{1}{2}$ et omettraient que dans le grand hôpital, le nombre total de naissances est de 50 tandis qu'il s'élève à 10 dans le petit hôpital. Il y a donc une différence du nombre de répétitions de naissances dans les deux hôpitaux. Pour répondre à la question, il faut prendre conscience que les tailles de ces deux échantillons diffèrent et sont nécessaires dans le calcul des probabilités.

- **Mathématiquement, comment procéderiez-vous pour résoudre l'exercice ?**

Généralement, les enseignants résoudraient l'exercice à l'aide d'une loi binomiale. De fait, un schéma de Bernoulli apparait puisqu'une répétition indépendante et identique d'une expérience aléatoire n'admettant que deux résultats possibles (fille ou garçon) a lieu. Dans ce cas, ils définiraient alors une variable aléatoire X comptant les naissances de garçons. Concernant le plus grand hôpital, la variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{2}$. En revanche, pour le plus petit hôpital, les paramètres sont $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$. Dès lors, la variable aléatoire X représentant le nombre de naissances des garçons doit être supérieure à 60% des naissances totales, c'est-à-dire 60% de 50 pour le grand hôpital et 60% de 10 pour le plus petit hôpital. Il faut donc calculer $P\left(X \geq \frac{60}{100}\, n\right)$, avec n égal à 10 ou 50 respectivement en fonction du type d'hôpital.

Pour le grand hôpital,

$$\begin{aligned} P\left(X \geq \frac{60}{100}\,50\right) &= 1 - P\left(X \leq \frac{60}{100}\,50 - 1\right) \\ &= 1 - P\,(X \leq 29) \\ &= 1 - 0,90 \\ &= 0,10. \end{aligned}$$

En ce qui concerne le petit hôpital,

$$\begin{aligned} P\left(X \geq \frac{60}{100}\,10\right) &= 1 - P\left(X \leq \frac{60}{100}\,10 - 1\right) \\ &= 1 - P\,(X \leq 5) \\ &= 1 - 0,62 \\ &= 0,38. \end{aligned}$$

Les enseignants en arriveraient à la conclusion qu'il y a plus de chance que le nombre de garçons dépasse 60% des naissances totales dans le petit hôpital que dans le grand.

- **Pensez-vous que tous les élèves procéderaient de la même façon ?**

Pour résoudre cet exercice en se préoccupant de la taille des échantillons, certains élèves pourraient construire un arbre de probabilité pour chaque hôpital. Nous avons commencé à représenter un des arbres à la Figure 4.2. Même si cet arbre n'est pas construit entièrement, il soutient la réflexion et constitue une aide à la résolution de l'exercice. A nouveau, comme expliqué à l'exercice précédent, cet outil n'est pas le plus adéquat pour trouver la solution. En effet, il est nécessaire de considérer 10 et 50 étapes, ce qui est long à mettre en place.

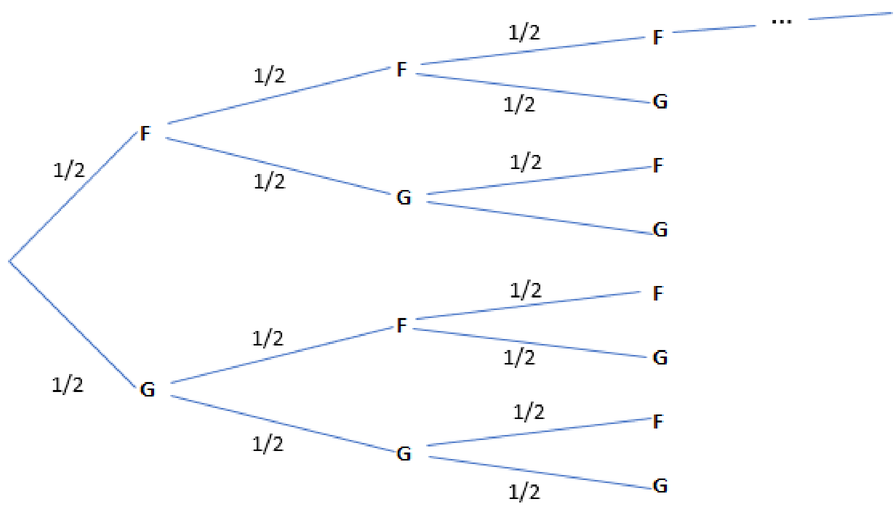


FIGURE 4.2 – Arbre représentant les naissances dans un hôpital
(F pour fille et G pour garçon)

D'autres élèves pourraient se ramener à une représentation de 10 ou 50 cases, avec F représentant la naissance d'une fille et G la naissance d'un garçon.

$$\underline{F}\ \ldots\ \underline{F}\ \underline{G}\ \ldots\ \underline{G}$$

Ils feraient dans ce cas appel aux permutations avec répétitions.

De nouveau, ces deux derniers raisonnements sont des étapes de construction de la loi binomiale. En plus du choix de l'outil, des difficultés pourraient survenir lors de la construction d'un **modèle adéquat** à la situation. Cela a été relevé dans l'hypothèse de la différence de raisonnement, à la Section 3.2.8. En effet, il est nécessaire de comprendre à quoi font référence les 60% de l'énoncé. Les élèves doivent décoder que la variable aléatoire représente le nombre de naissances et non le pourcentage. Dès lors, la variable aléatoire X représentant le nombre de naissances des garçons doit être supérieure à 60% des naissances totales, c'est-à-dire 60% de 50 pour le grand hôpital et 60% de 10 pour le plus petit hôpital. Les élèves doivent donc calculer $P\left(X \geq \frac{60}{100}\, n\right)$ et non $P\left(X \geq \frac{60}{100}\right)$, avec n égal à 10 ou 50 respectivement en fonction du type d'hôpital.

Au final, c'est en construisant un modèle approprié à la situation que les élèves parviendraient à répondre à la question. La **décomposition** en plusieurs étapes, qui peut également constituer une difficulté comme expliqué à la Section 3.2.4, amèneraient certains élèves à construire un arbre ou un système de cases avant de considérer une loi binomiale tandis que les enseignants opteraient en général directement pour cette dernière. Néanmoins, contrairement à ce que l'intuition indiquerait, il y a plus de chance que le nombre de garçons dépasse 60% des naissances totales dans le petit hôpital que dans le grand.

4.1.3 Jeux d'argent

Trois jeux d'argent consistent à lancer successivement deux dés.

1. *Le joueur gagne 130€ s'il obtient un double 6 et gagne 15€ sinon.*
2. *Le joueur gagne 1200€ s'il obtient un double 6 et perd 4€ sinon.*
3. *Le joueur gagne 1585€ s'il obtient un double 6 et perd 15€ sinon.*

A quel jeu vaut-il mieux jouer ?

- **Que pensez-vous que les élèves répondraient spontanément ?**

En regard des trois règles de jeu, certains élèves prudents pourraient répondre qu'il est préférable de jouer au premier jeu puisqu'il n'y a rien à perdre.

D'autres élèves, qui auraient le goût du risque, pourraient choisir le deuxième ou le troisième jeu en espérant gagner 1200€ ou 1585€ respectivement.

- **Mathématiquement, comment procéderiez-vous pour résoudre l'exercice ?**

Afin de répondre à la question, des enseignants pourraient traduire mathématiquement la situation. Pour ce faire, ils définiraient, pour chaque jeu, une variable aléatoire représentant les gains, la loi de probabilité et calculeraient en plus l'espérance mathématique.

1. Pour le premier jeu,

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto X(\omega) = \begin{cases} 130 & \text{si } \omega = (6;6), \\ 15 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : x_i \longmapsto f(x_i) = P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } x_i = 130, \\ \frac{35}{36} & \text{si } x_i = 15, \end{cases}$$

$$E(X) = 130\ \frac{1}{36} + 15\ \frac{35}{36} = \frac{655}{36} = 18,19.$$

2. Pour le deuxième jeu,

$$Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto Y(\omega) = \begin{cases} 1200 & \text{si } \omega = (6;6), \\ -4 & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : y_i \longmapsto g(y_i) = P(Y = y_i) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } y_i = 1200, \\ \frac{35}{36} & \text{si } y_i = -4, \end{cases}$$

$$E(Y) = 1200\ \frac{1}{36} - 4\ \frac{35}{36} = \frac{265}{9} = 29,44.$$

3. Pour le troisième jeu,

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto Z(\omega) = \begin{cases} 1585 & \text{si } \omega = (6;6), \\ -15 & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : z_i \longmapsto h(z_i) = P(Z = z_i) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } z_i = 1585, \\ \frac{35}{36} & \text{si } z_i = -15, \end{cases}$$

$$E(Z) = 1585\ \frac{1}{36} - 15\ \frac{35}{36} = \frac{265}{9} = 29,44.$$

Les enseignants concluraient qu'en moyenne le deuxième et le troisième jeu sont les plus rentables.

- **Pensez-vous que tous les élèves procéderaient de la même façon ?**

Certains élèves pourraient ne pas utiliser le même formalisme que l'enseignant mais arriveraient à la même conclusion. Ils construiraient plutôt un tableau pour représenter la loi de probabilité. Le Tableau 4.1 montre une représentation possible pour le premier jeu.

Gains	130	15
Probabilités	$\frac{1}{36}$	$\frac{35}{36}$

TABLE 4.1 – Tableau représentant la loi de probabilité du premier jeu

Ces élèves calculeraient l'espérance mathématique en additionnant les produits des gains par leur probabilité. Nous relevons un décalage de notations entre les enseignants et certains élèves. Les enseignants définissent très vite des variables aléatoires et lois de probabilité de manière formelle et rigoureuse tandis que les élèves n'en voient pas toujours l'intérêt. En général, ils définissent directement la loi de probabilité mais à l'aide d'un tableau, ce qui est moins abstrait pour eux.

- **Si vous n'avez la possibilité de ne jouer qu'une seule fois à un de ces jeux, choisiriez-vous toujours le même jeu ?**

Comme l'espérance mathématique représente la limite du gain moyen obtenu en jouant un grand nombre de fois, ce n'est donc pas le gain espéré sur une seule partie. Certains élèves pourraient confondre ces deux gains. Une des raisons de cette confusion réside dans l'interprétation de l'espérance donnée par certains auteurs. D'ailleurs, dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018], l'espérance mathématique est interprétée par le gain que le joueur peut espérer gagner en moyenne par partie lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois. Même si cette interprétation est correcte, elle reste toutefois abstraite car elle reprend en des termes similaires la notion d'espérance. Il nous semble donc important de préciser que l'espérance mathématique n'est pas forcément une valeur prise par la variable aléatoire. Ce n'est donc pas nécessairement gagné par le joueur. Il serait peut-être également intéressant d'insister sur la convergence du gain moyen en jouant un grand nombre de fois.

Pour répondre à la question, les enseignants ne pourraient donc pas uniquement se baser sur l'espérance mathématique. L'énoncé de cet exercice n'indique en effet pas que le joueur souhaite jouer un nombre élevé de parties. Le calcul de l'espérance mathématique dans ce cas n'est pas forcément nécessaire pour prendre une bonne décision. La réponse spontanée proposée par les élèves prudents serait correcte en ne jouant qu'une seule fois. Si l'objectif de l'exercice est de faire calculer l'espérance mathématique, il serait utile de spécifier que le nombre de parties jouées est important. Dans cet exercice, la présence d'éléments implicites peut inciter le mathématicien à se tourner vers le calcul de l'espérance alors que ce dernier n'est pas forcément nécessaire pour répondre à la question.

- **En tenant compte d'un nombre élevé de parties, quel autre outil mathématique permettrait de faire un choix entre les deux jeux les plus rentables ?**

En se concentrant uniquement sur la notion d'espérance mathématique, il n'est pas possible de départager les deux derniers jeux. En effet, aucune information quant à la dispersion des gains n'est prise en compte. Afin de prendre une décision à bon escient, il est utile de calculer l'écart-type. A cette fin, il est nécessaire de calculer la variance des variables aléatoires Y et Z. Pour ce faire, il est possible d'appliquer la formule pratique de la variance, à savoir $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$ pour la variable aléatoire Y. Certains pourraient également utiliser la définition, $V(Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i[Y_i - E(Y)]^2$.

En ce qui concerne le deuxième jeu,

$$\begin{aligned}
&V(Y) = 1200^2\frac{1}{36} + 4^2\frac{35}{36} - \left(\frac{265}{9}\right)^2 = 38370,80 \text{ et} \\
&\sigma(Y) = 195,88.
\end{aligned}$$

Pour le troisième jeu,

$$V(Y) = 1585^2 \frac{1}{36} + 15^2 \frac{35}{36} - \left(\frac{265}{9}\right)^2 = 69135,80 \text{ et}$$
$$\sigma(Y) = 262,94.$$

Interpréter l'écart-type d'un jeu pris individuellement n'a pas vraiment d'intérêt. L'écart-type est plus intéressant lorsqu'il est comparé à celui d'un autre jeu surtout quand les espérances mathématiques sont égales. Dans le cas du deuxième jeu, il vaut $195,88$ tandis qu'il s'élève à $262,94$ pour le troisième jeu avec les mêmes espérances mathématiques. Par conséquent, pour le même gain moyen, il est moins risqué de jouer au deuxième jeu car son écart-type est plus faible. Les gains de ce dernier se répartissent en moyenne de manière plus concentrée autour de l'espérance que ceux du troisième jeu.

4.1.4 Famille de deux enfants

Vos voisins ont deux enfants. Vous avez vu par la fenêtre que l'un des enfants est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit aussi une fille ?
On considère qu'à la naissance, les évènements « avoir une fille » et « avoir un garçon » sont équiprobables et indépendants. [Paradoxe des deux enfants, 2021] [2]

- **Que pensez-vous que les élèves répondraient spontanément ?**

De manière intuitive, certains élèves pourraient être tentés de répondre que la probabilité que l'autre enfant soit une fille est de $\frac{1}{2}$. En effet, comme le sexe d'un enfant est connu, il ne reste qu'à déterminer le sexe de l'autre. A priori, ils penseraient que connaitre le sexe d'un enfant n'a pas d'influence sur le sexe de l'autre. Ce raisonnement n'est pas correct. Le fait d'observer qu'un enfant est une fille signifie que les voisins ont soit deux filles, soit un garçon et une fille. Par ailleurs, rien dans l'énoncé n'indique que la fille connue est l'aînée ou la cadette. La place de l'enfant dans la fratrie a aussi une importance. La réalisation de l'évènement « avoir deux filles, avoir un garçon suivi d'une fille ou avoir une fille suivie d'un garçon » a lieu. Cette réalisation a une influence sur le fait que l'autre enfant soit aussi une fille et guide vers un problème de probabilités conditionnelles. La difficulté réside dans l'identification de la condition dans l'énoncé.

- **Mathématiquement, comment procéderiez-vous pour résoudre l'exercice ?**

« Avoir vu une fille par la fenêtre » signifie que les voisins ont au moins une fille. Cette connaissance influence l'évènement « l'autre enfant est aussi une fille ». Ce dernier évènement permet alors de considérer l'événement « avoir deux filles sachant qu'il y a au moins une fille ». Il est bien question du calcul d'une probabilité conditionnelle. Afin de déterminer cette probabilité, il est nécessaire de décomposer l'expérience aléatoire en différentes étapes. Cette **décomposition** engendre une difficulté comme expliqué à la section 3.2.4 de l'hypothèse sur la différence de raisonnement. En effet, afin de trouver la probabilité conditionnelle recherchée, il faut appliquer la formule de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

2. Le site consulté ne mentionne aucun auteur. C'est pourquoi nous avons uniquement indiqué le titre de la page Internet.

où dans ce cas, A désigne l'évènement « avoir deux filles » et B l'évènement « avoir au moins une fille ».

Pour calculer les différentes probabilités intervenant dans la formule, des enseignants pourraient décomposer l'expérience aléatoire à l'aide de l'arbre représenté à la Figure 4.3.

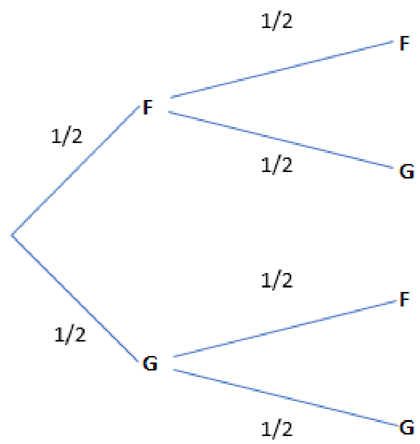


FIGURE 4.3 – Arbre représentant les probabilités du sexe des enfants (F pour fille et G pour garçon)

Ils trouveraient alors que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(FF) + P(FG) + P(GF) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

et que $P(A \cap B) = P(FF) = \frac{1}{4}$. Par conséquent, ils obtiendraient que

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Ils concluraient finalement qu'après avoir observé que l'un des enfants est une fille, la probabilité que l'autre soit aussi une fille est de $\frac{1}{3}$. Cette réponse diffère de celle donnée intuitivement et pour laquelle les probabilités conditionnelles n'ont pas été prises en compte.

- **Pensez-vous que tous les élèves procéderaient de la même façon ?**

C'est seulement après avoir surmonté la difficulté liée à la traduction de la condition de la probabilité conditionnelle que certains élèves arriveraient à la même conclusion que l'enseignant. Le tableau à double entrée constitue alors un autre outil pour résoudre l'exercice puisque ce dernier considère uniquement deux enfants. Certains de ces élèves retrouveraient ainsi les mêmes probabilités à l'aide du Tableau 4.2.

		Sexe du $2^{\text{ème}}$ enfant		
		F	**G**	
Sexe du 1^{er} enfant	**F**	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	G	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Table 4.2 – Tableau à double entrée reprenant les probabilités concernant le sexe des enfants (F pour fille et G pour garçon)

- **Considérons à présent l'énoncé qui suit. Que répondriez-vous mathématiquement ?**

> *Vos voisins ont deux enfants. L'aînée est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?*
> *On considère qu'à la naissance, les évènements « avoir une fille » et « avoir un garçon » sont équiprobables et indépendants.* [Paradoxe des deux enfants, 2021]

Ce qui différencie cet énoncé du précédent est que l'aînée est une fille. La connaissance du sexe du premier enfant inviterait des enseignants à supprimer l'évènement « avoir un garçon suivi d'une fille ». Ils constateraient qu'ils sont toujours dans un problème de probabilité conditionnelle mais avec une autre condition. Pour répondre à la question posée, ils suivraient alors le même raisonnement mais en modifiant les probabilités par rapport à la nouvelle situation.

En se basant à nouveau sur l'arbre de la Figure 4.3 ou sur le Tableau 4.2, ils calculeraient que

$$\begin{aligned} P(C|D) &= \frac{P(C \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

avec C représentant l'évènement « avoir deux filles » et D l'évènement « l'aînée est une fille ».

Au final, dans cet énoncé, nous remarquons que la question de probabilité conditionnelle ne se pose pas puisque les évènements sont indépendants, c'est-à-dire $P(C|D) = P(C)$. Par conséquent, la probabilité d'avoir deux filles est bien de $\frac{1}{2}$. C'est d'ailleurs en général à cet énoncé que les élèves répondraient lorsqu'ils prennent en compte l'indépendance des évènements à la première question.

La **décomposition** en plusieurs étapes est également nécessaire dans cet exercice et peut constituer une difficulté comme expliqué à la Section 3.2.4. Elle dirige les enseignants et élèves sur la construction d'un arbre ou d'un tableau. De plus, nous ressortons qu'il n'est pas toujours évident de déterminer si un évènement a une influence sur un autre et donc de savoir s'il faut raisonner en termes de probabilités conditionnelles ou non.

4.1.5 Galette des rois

Pour l'Epiphanie, la tradition consiste à manger de la galette des rois dans laquelle se cache une fève. Considérons que cette dernière occupe un secteur d'environ $34°$. *Imaginons qu'une première découpe a été réalisée du centre de la galette au bord de celle-ci sans toucher la fève. En supposant que la galette et la fève soient circulaires, une deuxième découpe a été faite au hasard.*

1. *Quelle est la probabilité de couper sur la fève ?*
2. *Est-il possible d'obtenir une part de* $90°$ *? Si oui, quelle en est la probabilité ?*

- **Que pensez-vous que les élèves répondraient spontanément ?**

Certains élèves pourraient répondre à la première question en envisageant le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles. Ils trouveraient alors une probabilité de $\frac{34}{360} \simeq 0,094$.

Pour la seconde question, certains élèves diraient qu'il est possible de couper une part de $90°$ et que la probabilité est de $\frac{90}{360}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{4}$. Les questions ont été mises dans cet ordre de façon à provoquer un effet de contrat. Ces élèves se laisseraient en effet influencer par la réponse donnée à la première question et le raisonnement qu'ils auraient suivi.

- **Mathématiquement, comment procéderiez-vous pour résoudre l'exercice ?**

Des enseignants pourraient directement établir le lien avec la loi uniforme sur $[0; 360]$. Dans ce cas, ils définiraient une variable aléatoire X représentant l'angle du secteur formé entre les deux découpes. Pour répondre à la première question, ils calculeraient que

$$P(\alpha \leq X \leq \alpha + 34) = \frac{34}{360},$$

où α représenterait l'angle entre la première découpe et le rayon tangent à la plus proche extrémité de la fève comme à la Figure 4.4.

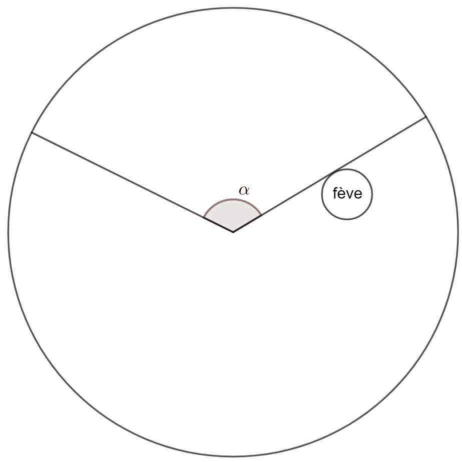


FIGURE 4.4 – Schématisation de la situation de l'exercice de la galette des rois

La réponse à la deuxième question découle d'une propriété des variables aléatoires continues lorsque ces dernières prennent une valeur exacte. Les enseignants détermineraient alors que $P(X = 90) + P(X = 270) = 0$.

Nous tenons à faire remarquer aux enseignants que l'élément qui pourrait les amener à penser à une loi uniforme est le terme « hasard » dans l'énoncé. En effet, ces deux termes sont souvent pris l'un pour l'autre or, ce n'est pas toujours le cas. Selon la situation, ces termes peuvent être associés ou non. Lorsque ceux-ci ne peuvent coïncider, cela peut mener à une confusion qui pourrait être à l'origine d'un obstacle épistémologique comme expliqué à la Section 3.2.7 sur les **expressions de la vie courante**. Par exemple, si nous lançons une flèche au hasard dans une cible circulaire divisée en cinq secteurs comme sur la Figure 4.5 et que nous nous intéressons au secteur dans lequel la flèche atterrit, il n'est plus question d'équiprobabilité. De fait, dans ce cas, la variable aléatoire représente le secteur atteint par la flèche et non le point d'impact parmi l'ensemble des points de la cible.

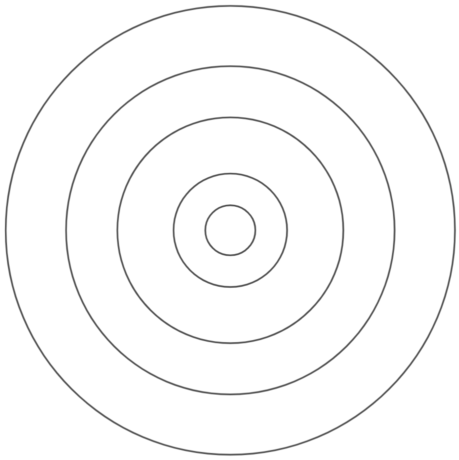


FIGURE 4.5 – Cible d'un jeu de fléchettes

- **Comment pensez-vous que les élèves vont réagir à cette probabilité nulle ?**

Certains élèves n'admettraient pas facilement que la probabilité est nulle alors que l'événement est possible. Dans le secondaire, les élèves associent en général une probabilité nulle à un événement impossible. Ils percevraient donc dans cet exercice une contradiction. Cette dernière rejoint l'obstacle expliqué dans l'hypothèse de la différence de raisonnement en lien avec la notion d'**évènement impossible**, à la Section 3.2.6. Si nous analysons plus précisément cette probabilité nulle, nous observons qu'elle n'est pas exactement nulle mais presque sûrement en regard de la théorie de la mesure. L'événement « obtenir une part de 90° » est en réalité presque impossible. Cet obstacle est dû aux connaissances de l'enseignement secondaire sur les notions d'événement impossible et de probabilité nulle. D'ailleurs, lorsqu'il faut répondre à la question intuitivement, une limite intervient : $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$, où x correspond au nombre d'angles de découpe possibles. Pour des valeurs de x très grandes, $\frac{1}{x}$ restera toujours strictement positive. Cette façon de répondre intuitivement peut constituer un moyen de simplifier l'explication de probabilité nulle pour un évènement qui pourrait malgré tout se réaliser. Cela permettrait également de faire le lien avec la formule de Laplace.

4.1.6 Dé pipé

Dans l'expérience suivante, on dispose de trois dés à six faces, deux d'entre-eux étant normaux et le troisième pipé. Un dé est normal si chaque face a la même probabilité d'apparaitre, alors que pour le dé pipé, la face six est trois fois plus probable que les autres.

1. *Sachant que le dé a donné un six, quelle est la probabilité qu'il soit pipé ?*
2. *On choisit maintenant deux dés parmi les trois disponibles et on les lance. On note A={le dé pipé fait partie des deux dés choisis} et B={la somme des résultats des deux dés lancers vaut sept}. Existe-t-il une dépendance entre les évènements A et B ?*

Inspiré de [PC1-Probabilités discrètes, 2019]

- **Que pensez-vous que les élèves répondraient spontanément ?**

Intuitivement, certains élèves risqueraient de répondre à la première question $\frac{1}{3}$ puisqu'ils feraient abstraction du mot pipé. Ils oublieraient de considérer la dépendance entre « avoir six » et « le dé est pipé ».

Concernant la deuxième question, certains supposeraient intuitivement qu'il existe un lien entre les deux évènements. En effet, avoir un dé pipé semble avoir une influence sur la valeur de la somme. Comme la probabilité d'obtenir six sur le dé pipé est trois fois plus importante que sur les autres dés et comme le score minimum sur les autres dés est un, ces élèves penseraient que la somme est majoritairement supérieure à sept.

- **Mathématiquement, comment procéderiez-vous pour résoudre l'exercice ?**

En ce qui concerne la première question, des enseignants résoudraient l'exercice à l'aide des probabilités conditionnelles. Ce sont les termes « sachant que » qui les amèneraient à réfléchir dans ce sens. Pour ce faire, ils mettraient en évidence une première difficulté liée à la **décomposition** d'une expérience aléatoire dans laquelle plusieurs étapes interviennent comme expliqué à la Section 3.2.4. En effet, ils devraient dans un premier temps choisir aléatoirement un dé parmi les trois. Dans un second temps, il faut envisager la probabilité d'apparition des faces. Ils pourraient représenter la situation à l'aide d'un arbre comme celui de la Figure 4.6. Afin de le construire, ils commenceraient d'ailleurs par le type de dé et ensuite par son résultat. A partir de cet arbre, les enseignants obtiendraient que

$$\begin{aligned} P(\mathrm{P}|6) &= \frac{P(\mathrm{P} \cap 6)}{P(6)} \\ &= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}\frac{3}{8} + \frac{2}{3}\frac{1}{6}} \\ &= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{17}{72}} \\ &= \frac{9}{17}. \end{aligned}$$

Finalement, ils concluraient qu'il y a neuf chances sur 17 d'obtenir un dé pipé sachant que le résultat obtenu est six.

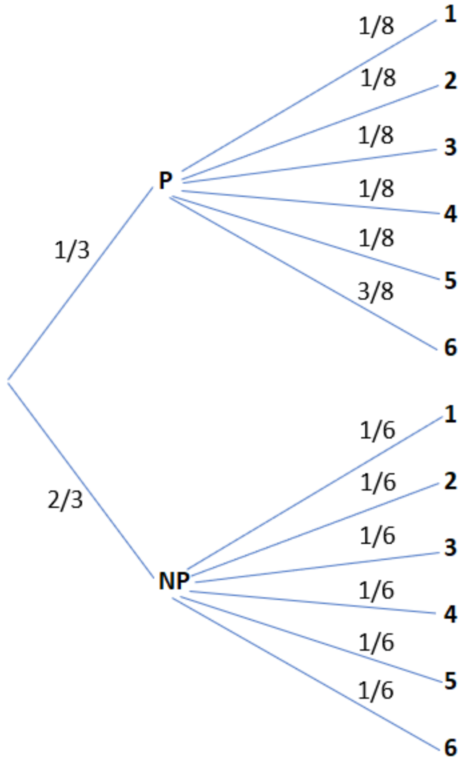


Figure 4.6 – Arbre représentant la question 1 de l'exercice lié au dé pipé (P pour pipé, NP pour non pipé et les chiffres correspondent aux résultats du lancer)

En ce qui concerne la deuxième question, afin de déterminer si les événements A et B définis dans l'énoncé sont indépendants, certains enseignants penseraient à vérifier l'égalité de la règle de multiplication, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Tout d'abord, ils calculeraient la probabilité d'obtenir le dé pipé parmi les deux choisis au hasard grâce à l'arbre représenté à la Figure 4.7.

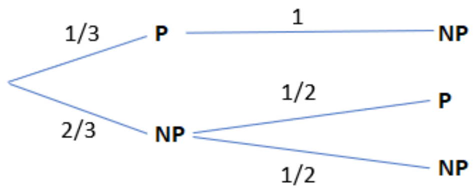


Figure 4.7 – Arbre représentant le choix au hasard de deux dés (P pour pipé et NP pour non pipé)

Dans ce cas, ils obtiendraient que

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}\frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour calculer la probabilité de l'évènement B, certains enseignants construiraient un nouvel arbre comme celui de la Figure 4.8. Ils se rendraient compte que le nombre de branches est conséquent et qu'une difficulté liée à la décomposition de l'expérience aléatoire peut survenir. En effet, lors de la première étape, il faut penser à tenir compte de la probabilité du dé lancé qui est soit de $\frac{1}{3}$ ou de $\frac{2}{3}$ mais également du résultat en fonction du type de dé. Lors de la deuxième étape, le raisonnement est similaire mais il faut prendre en considération la réalisation de l'évènement de la première étape.

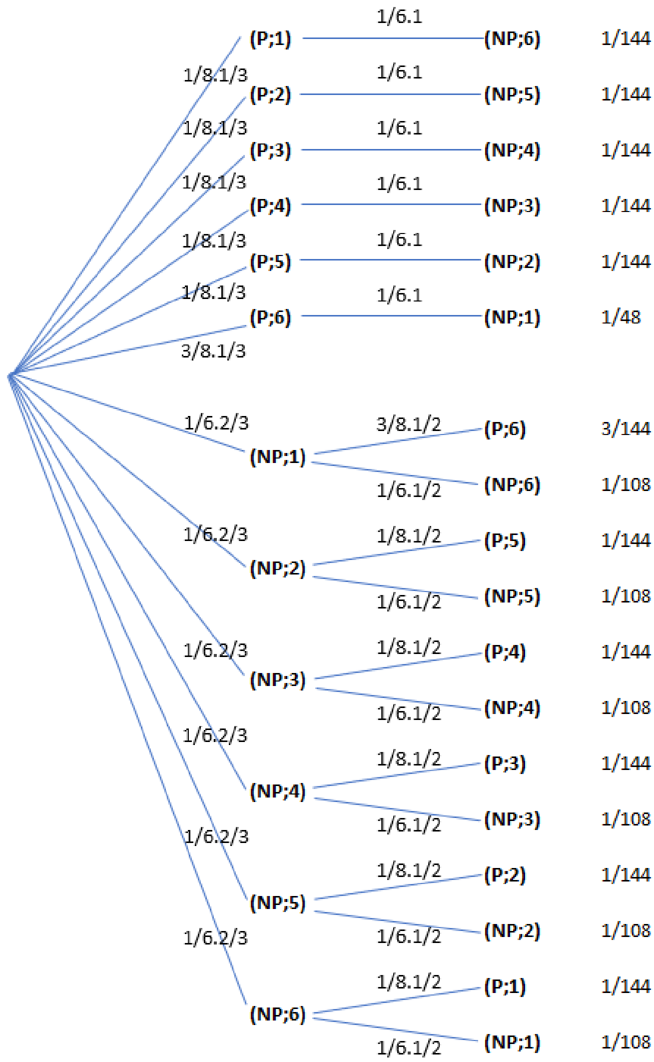


FIGURE 4.8 – Arbre représentant le lancer au hasard de deux dés et dont la somme vaut sept (P pour pipé, NP pour non pipé et les chiffres correspondent aux résultats d'un lancer de dé)

Ils trouveraient alors que

$$\begin{aligned} P(B) &= 13\frac{1}{144} + \frac{1}{48} + 6\frac{1}{108} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Enfin, il est nécessaire de calculer la probabilité de l'intersection des deux événements. En s'aidant de l'arbre, ils obtiendraient que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 13\frac{1}{144} + \frac{1}{48} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

En multipliant $P(A)$ et $P(B)$, ils retrouveraient $P(A \cap B)$ prouvant ainsi que les deux évènements sont **indépendants** bien qu'intuitivement certains élèves auraient pensé l'inverse. Ce phénomène a été expliqué à la Section 3.2.5. Le fait de choisir le dé pipé n'a par conséquent aucune influence sur le fait d'obtenir une somme égale à sept. Une confrontation entre la règle de multiplication pour vérifier l'indépendance et l'intuition apparait alors. Nous souhaitons faire remarquer qu'il serait intéressant de rencontrer un exercice où intuitivement, les élèves identifieraient une indépendance d'évènements à la lecture de l'énoncé mais que mathématiquement, ce ne serait pas le cas. En effet, tenir compte de l'indépendance de deux évènements pourraient diriger les élèves vers des raisonnements erronés puisqu'ils ne considéreraient pas l'influence entre les deux évènements.

- **Pensez-vous que tous les élèves procéderaient de la même façon ?**

En ce qui concerne la première question, certains élèves repéreraient comme les enseignants les termes « sachant que ». Ces derniers les pousseraient à résoudre l'exercice à l'aide des probabilités conditionnelles et à penser à une certaine chronologie. Dans ce cas, ils connaissent le résultat du dé avant de savoir lequel parmi les trois a été choisi. Ils seraient dès lors confrontés à une inversion de la chronologie des évènements. Le **phénomène de Falk**, illustré à la Section 3.2.5 dans l'hypothèse de la différence de raisonnement, peut survenir. Les élèves sensibles à cette difficulté négligeraient l'information concernant la deuxième étape puisqu'elle n'aurait pas d'influence, selon eux, sur la première. Ils répondraient alors $\frac{1}{3}$. Or, il existe bien une influence entre les deux évènements. D'ailleurs, la solution correcte est de $\frac{9}{17}$.

Contrairement aux enseignants, certains élèves pourraient séparer la première étape de l'expérience aléatoire selon le numéro des dés. Ils construiraient alors un arbre à trois branches pour la première étape comme à la Figure 4.9. D'autres pourraient aussi penser au Tableau 4.3. Pour ce faire, comme l'énoncé indique que la face six est trois fois plus probable que les autres, certains élèves pourraient éprouver des difficultés pour traduire cela en

$$\begin{aligned} 3x + 5x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

où x désigne la probabilité des faces une à cinq.

		Résultat du lancer de dé						
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Choix du dé	**NP**	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
	NP	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
	P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{3}$
		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

TABLE 4.3 – Tableau à double entrée représentant la question 1 de l'exercice lié au dé pipé et en différenciant le numéro des dés

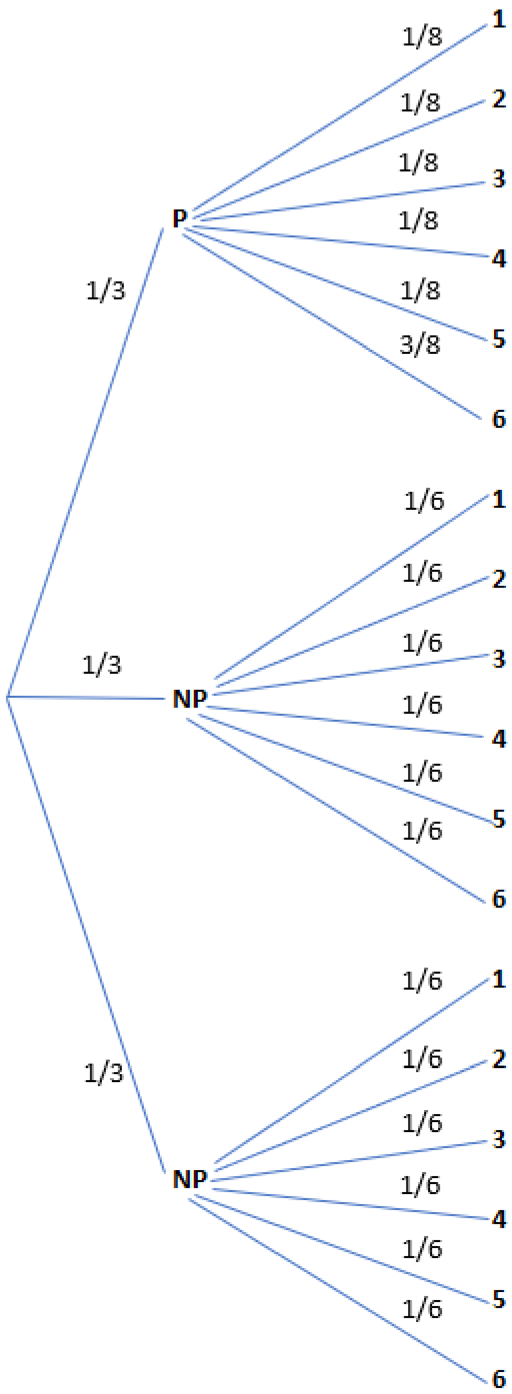


FIGURE 4.9 – Arbre représentant la question 1 de l'exercice lié au dé pipé et en différenciant le numéro des dés
(P pour pipé, NP pour non pipé et les chiffres correspondent aux résultats d'un lancer de dé)

Les étudiants qui diviseraient immédiatement la situation en fonction du type et non du numéro des dés, retrouveraient soit l'arbre des enseignants, soit le Tableau 4.4.

		Résultat du lancer de dé						
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Choix du dé	**NP**	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{3}$
	P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{3}$
		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

TABLE 4.4 – Tableau à double entrée représentant la question 1 de l'exercice du dé pipé et en différenciant le type des dés

Pour trouver les probabilités sur les premières branches de l'arbre, quelques étudiants pourraient également utiliser l'analyse combinatoire. La probabilité de choisir au hasard le dé pipé ($\frac{1}{3}$) revient au final à choisir un dé parmi le seul dé pipé (C_1^1) sur les différents cas possibles, c'est-à-dire sur le choix d'un dé parmi les trois (C_3^1). Cette probabilité doit être multipliée par la probabilité d'apparition du six du dé pipé ($\frac{3}{8}$). Par conséquent,

$$P(\mathrm{P} \cap 6) = \frac{C_1^1}{C_3^1}\frac{3}{8} = \frac{1}{3}\frac{3}{8} = \frac{1}{8}.$$

Peu importe l'outil choisi, les élèves parviendraient à la même solution que les enseignants. Les raisonnements effectués sont équivalents mais certains demandent parfois plus d'étapes et de temps. Certains outils sont donc plus efficaces que d'autres. Par exemple, différencier les dés d'après leur numéro plutôt que leur type pourrait entraîner des complications supplémentaires : il ne faudrait pas oublier de considérer certaines branches ou cellules lors des calculs.

En ce qui concerne la deuxième question, certains élèves seraient poussés à utiliser l'analyse combinatoire puisqu'un choix de dé s'impose. Ils trouveraient alors que

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{C_1^1 C_2^1}{C_3^2} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Quelques-uns pourraient également penser au Tableau 4.5. Sa construction n'est cependant pas la plus évidente. Dans ce cas, les lignes correspondent au choix du premier dé et les colonnes au choix du second. Par exemple, pour trouver la probabilité conjointe égale à 0, les élèves doivent se rappeler qu'il est impossible de choisir deux dés pipés puisqu'il n'y en a qu'un seul. Lorsque le premier dé choisi est pipé, pour le deuxième choix, il ne reste que des dés normaux, d'où $P(\mathrm{P} \cap \mathrm{NP}) = \frac{1}{3}1$, c'est-à-dire une probabilité de $\frac{1}{3}$. Les probabilités marginales s'obtiennent en revanche en prenant la somme des probabilités conjointes de la même ligne ou colonne.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Choix du 2ème dé</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>P</td><td>NP</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Choix du 1er dé</td><td>P</td><td>0</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>NP</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{2}{3}$</td><td>1</td></tr>
</table>

TABLE 4.5 – Tableau à double entrée modélisant le choix au hasard de deux dés (P pour pipé et NP pour non pipé)

La suite du raisonnement rejoindrait celle de l'enseignant mais la construction du tableau pourrait aussi être une autre alternative dans le but de calculer $P(B)$ et $P(A \cap B)$. Cependant, le nombre de cellules serait élevé.

4.1.7 Bancs publics

> *Le parc d'une petite ville est équipé de trois bancs à deux places. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. Quelle est la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte ?* [Nechache, 2016]

- **Mathématiquement, comment procéderiez-vous pour résoudre l'exercice ?**

A la lecture de l'énoncé, il est important de prendre conscience que deux directions se présentent pour résoudre l'exercice. En effet, certains enseignants raisonneraient en considérant les six places tandis que d'autres tiendraient compte uniquement des trois bancs. Dans la suite, ils définiraient A l'événement « les deux personnes sont assises côte à côte ».

Dans le premier cas, il y a une chance sur six de s'asseoir sur une des six places. Ils pourraient dès lors penser à modéliser la situation en construisant un arbre comme celui de la Figure 4.10. La probabilité que les deux personnes soient assises l'une à côté de l'autre suppose dans ce cas qu'elles soient assises toutes les deux sur le premier banc, sur le deuxième banc ou sur le troisième banc. Le calcul à effectuer est donc le suivant :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_{11} \cap B_{12}) + P(B_{12} \cap B_{11}) + P(B_{21} \cap B_{22}) + P(B_{22} \cap B_{21}) \\ &\quad + P(B_{31} \cap B_{32}) + P(B_{32} \cap B_{31}) \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} \\ &= \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

avec B_{ij} désignant l'évènement « la personne s'assied sur le banc i à la place j », $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2\}$.

En revanche, dans le deuxième cas, en tenant compte uniquement des trois bancs, d'autres enseignants seraient tentés de représenter la situation comme à la Figure 4.11.

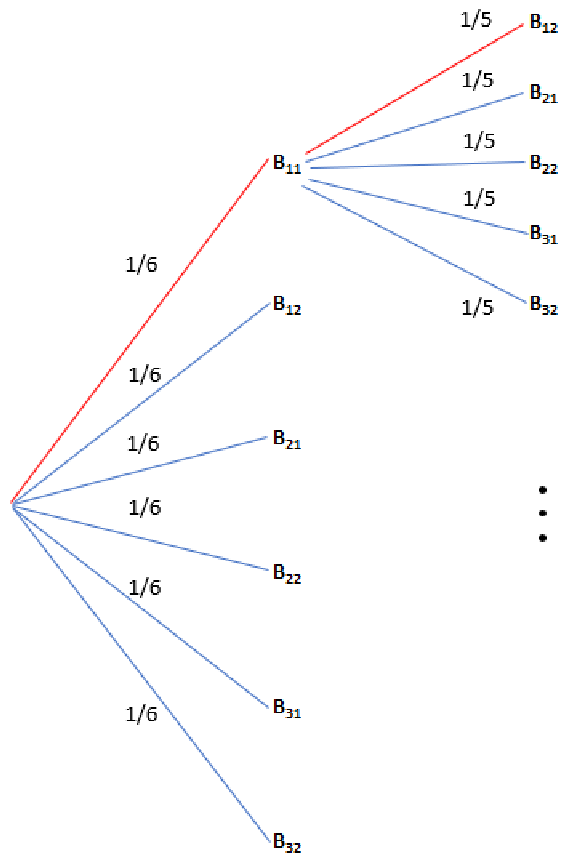


FIGURE 4.10 – Arbre considérant les six places (B_{ij} désignant l'évènement « la personne s'assied sur le banc i à la place j », $i \in \{1,2,3\}$ et $j \in \{1,2\}$)

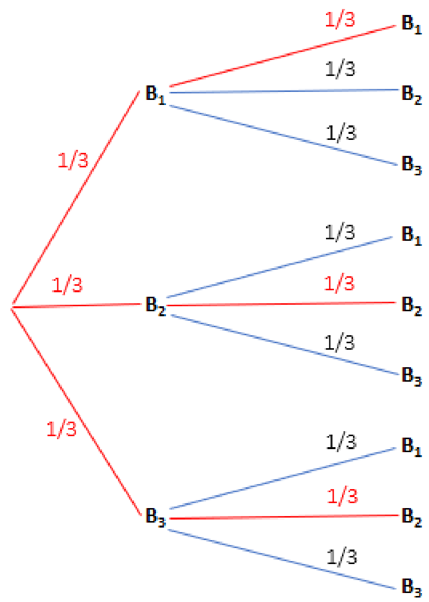


FIGURE 4.11 – Arbre considérant les trois bancs (B_i désignant l'évènement « la personne s'assied sur le banc i » et $i \in \{1,2,3\}$)

De ce deuxième arbre, ils déduiraient que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1 \cap B_1) + P(B_2 \cap B_2) + P(B_3 \cap B_3) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

avec B_i désignant l'évènement « la personne s'assied sur le banc i » et $i \in \{1, 2, 3\}$.

Dans ce modèle, les enseignants observeraient que le choix de la première personne n'influence pas celui de la seconde étant donné qu'il y a toujours deux places sur un banc. Il y a donc indépendance des évènements.

Avant de conclure sur la différence des solutions calculées, il est intéressant de constater que certains pourraient schématiser les situations à l'aide des Tableaux 4.6 et 4.7. En ce qui concerne le premier tableau, les probabilités nulles précisent qu'il est impossible que les deux personnes s'assoient sur la même place.

		2^{ème} personne						
		B_{11}	**B_{12}**	**B_{21}**	**B_{22}**	**B_{31}**	**B_{32}**	
1^{ère} personne	**B_{11}**	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$
	B_{12}	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$
	B_{21}	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$
	B_{22}	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$
	B_{31}	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$
	B_{32}	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

TABLE 4.6 – Tableau à double entrée tenant compte des six places

		2^{ème} personne			
		B_1	**B_2**	**B_3**	
1^{ère} personne	**B_1**	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
	B_2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
	B_3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

TABLE 4.7 – Tableau à double entrée tenant compte des trois bancs

En plus des tableaux et des arbres, d'autres pourraient avoir recours aux formules de l'analyse combinatoire pour répondre à la question. Il s'agit dans les deux cas de faire appel aux combinaisons simples. Concernant le premier cas, ils calculeraient que

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{C_6^1 C_1^1}{C_6^1 C_5^1} \\ &= \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

où le numérateur prend en compte le fait que le premier choisisse une place parmi les six (C_6^1) et que le deuxième s'assied à la seule place disponible pour que l'évènement A se réalise (C_1^1). En ce qui concerne le dénominateur, le premier a le choix d'une place parmi les six (C_6^1) et pour le second, il ne reste que cinq places (C_5^1).

Dans le deuxième cas, ils obtiendraient, de manière analogue mais en tenant compte uniquement des trois bancs, que

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{C_3^1 C_1^1}{C_3^1 C_3^1} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Les deux solutions trouvées, peu importe l'outil utilisé, sont valides en fonction du **modèle** choisi et des hypothèses envisagées comme expliqué à la Section 3.2.8. En effet, dans le premier cas, les enseignants considèrent le problème en termes de places tandis que dans le deuxième, ils basent leur raisonnement uniquement sur les trois bancs. Ces deux façons d'aborder le problème de départ induisent des modélisations différentes mais correctes selon l'approche adoptée. Cette différence de modélisation résulte d'un manque d'information dans l'énoncé. En effet, il n'est pas précisé s'il faut considérer les trois bancs ou les six places.

- **Sur base de votre raisonnement, comment reformuleriez-vous l'énoncé pour le rendre plus explicite ?**

  Pour ceux qui auraient pensé aux places assises, une formulation possible pourrait être la suivante :

  « *Le parc d'une petite ville est équipé de trois bancs à deux places. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard sur deux places des bancs. Quelle est la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte ?* »

  Dans le cas où les bancs seraient pris en compte, il faudrait par exemple reformuler l'exercice comme suit :

  « *Le parc d'une petite ville est équipé de trois bancs à deux places. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard sur l'un des bancs. Quelle est la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte ?* »

  Nous souhaitons souligner tout de même que le terme « hasard » intervient de nouveau dans cet énoncé. Il sous-entend ici que les personnes s'installent avec les mêmes chances, donc de manière équiprobable. Cependant, il arrive parfois que dans certains exercices, cette association ne soit pas réalisée comme à l'exemple de la cible de l'exercice sur la galette des rois.

4.2 Mise en oeuvre d'un dispositif en ligne

L'idée générale de cette section est d'expliquer une manière de concevoir un dispositif de formation pour les enseignants des variables aléatoires et lois de probabilité. Notre objectif est de faire transparaitre toute l'analyse que nous venons d'effectuer sur un site en ligne. De cette manière, un grand nombre d'enseignants pourraient y avoir accès. Cela constituerait une aide supplémentaire dans l'élaboration de leurs cours et dans la prise de conscience des obstacles et difficultés propres à l'enseignement des probabilités. Cependant, nous souhaitons souligner que ce dispositif n'est pas terminé et constitue principalement une perspective.

Afin de créer un site Internet, nous nous sommes tournés vers un professeur d'informatique, Pascal Job. Ce dernier s'est alors occupé de la programmation du site, dont le lien est `probabilite.be`, en tenant compte de nos attentes et objectifs. Il s'est également assuré que le site soit adapté à plusieurs écrans. En ce qui nous concerne, nous nous nous sommes plutôt occupés de la mise en page, c'est-à-dire du choix des couleurs et images, du design, du nombre d'onglets, de la police, etc. Dans un second temps, Pascal Job nous a donné accès à la face cachée du site de manière à inclure les différents contenus. Nous avons alors ajouté nos exercices commentés, ainsi que toutes les images, tableaux et équations liés. Nous voulions montrer à quoi nous souhaitions arriver dans la scénarisation des réflexions didactiques. Le mémoire est accessible via la page d'accueil néanmoins les obstacles ne sont pas directement présents sur le site. Il serait intéressant de créer un onglet afin qu'ils apparaissent explicitement. La Figure 4.12 montre la page d'accueil du site tandis que les Figures 4.13 et 4.14 dévoilent la face cachée du site à laquelle nous avons eu accès.

Concernant les options, plusieurs possibilités s'offrent à nous. Nous pouvons choisir de faire apparaitre un onglet et son nom, choisir l'image de la bannière, inclure un fichier extérieur. Nous pouvons par ailleurs établir différents liens, que ce soit vers une page Internet externe, vers un autre onglet du site, vers une adresse mail ou vers un élément du texte. Un langage adapté est également nécessaire. Il a été fait de manière à ressembler à celui de LaTeX.

Revenons à présent au dispositif et mettons en évidence la scénarisation de l'analyse de l'exercice de la famille de deux enfants par l'intermédiaire du site. Afin d'amener l'enseignant dans une démarche réflexive sans être influencé, nous rendons visible uniquement le problème de départ et la première question s'y rapportant, comme illustré à la Figure 4.15. Ensuite, lorsque l'enseignant souhaite prendre connaissance de notre analyse, il la fait apparaitre progressivement, comme représenté à la Figure 4.16. Cette affichage progressif est plus dynamique et adapté à nos objectifs. Sur les Figures 4.17 et 4.18, nous montrons les arbres de probabilité, équations liées et tableaux à double entrée.

Finalement, du point de vue de nos perspectives, nous souhaiterions améliorer la qualité du site. Pour ce faire, il serait intéressant de concevoir une page mettant en évidence les différents obstacles relevés dans ce mémoire. De cette manière, nous pourrions faire des liens depuis les exercices vers l'explication de ces obstacles. De plus, des liens extérieurs vers des outils d'enseignement supplémentaires et en relation avec le domaine des probabilités (exploitation d'outils numériques comme Excel et GeoGebra, articles de recherche, etc.) trouveraient leur place dans ce dispositif. L'objectif de ce site est qu'il devienne un outil pratique pour faciliter l'enseignement des variables aléatoires et lois de probabilité.

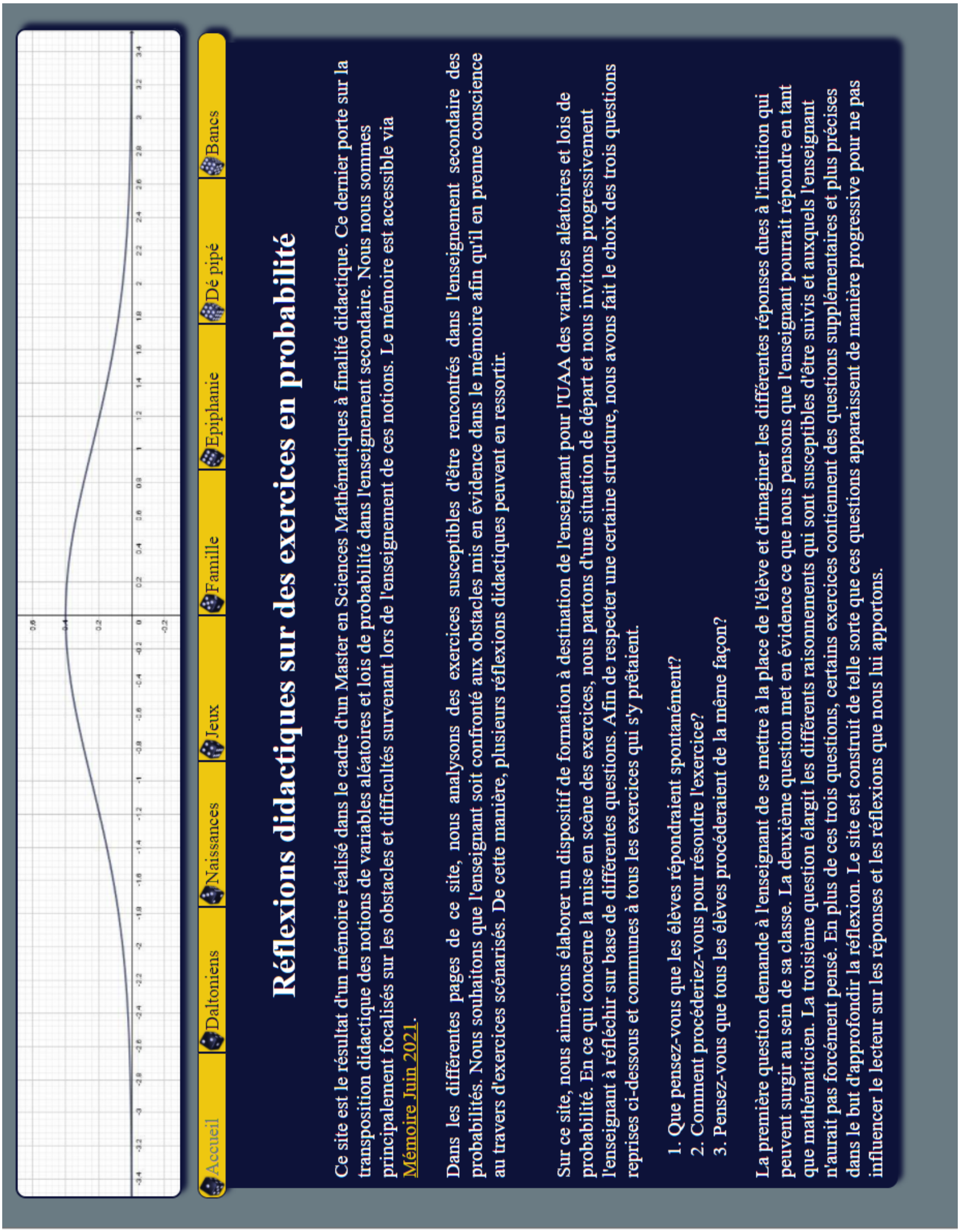


Figure 4.12 – Page d'accueil du site Internet

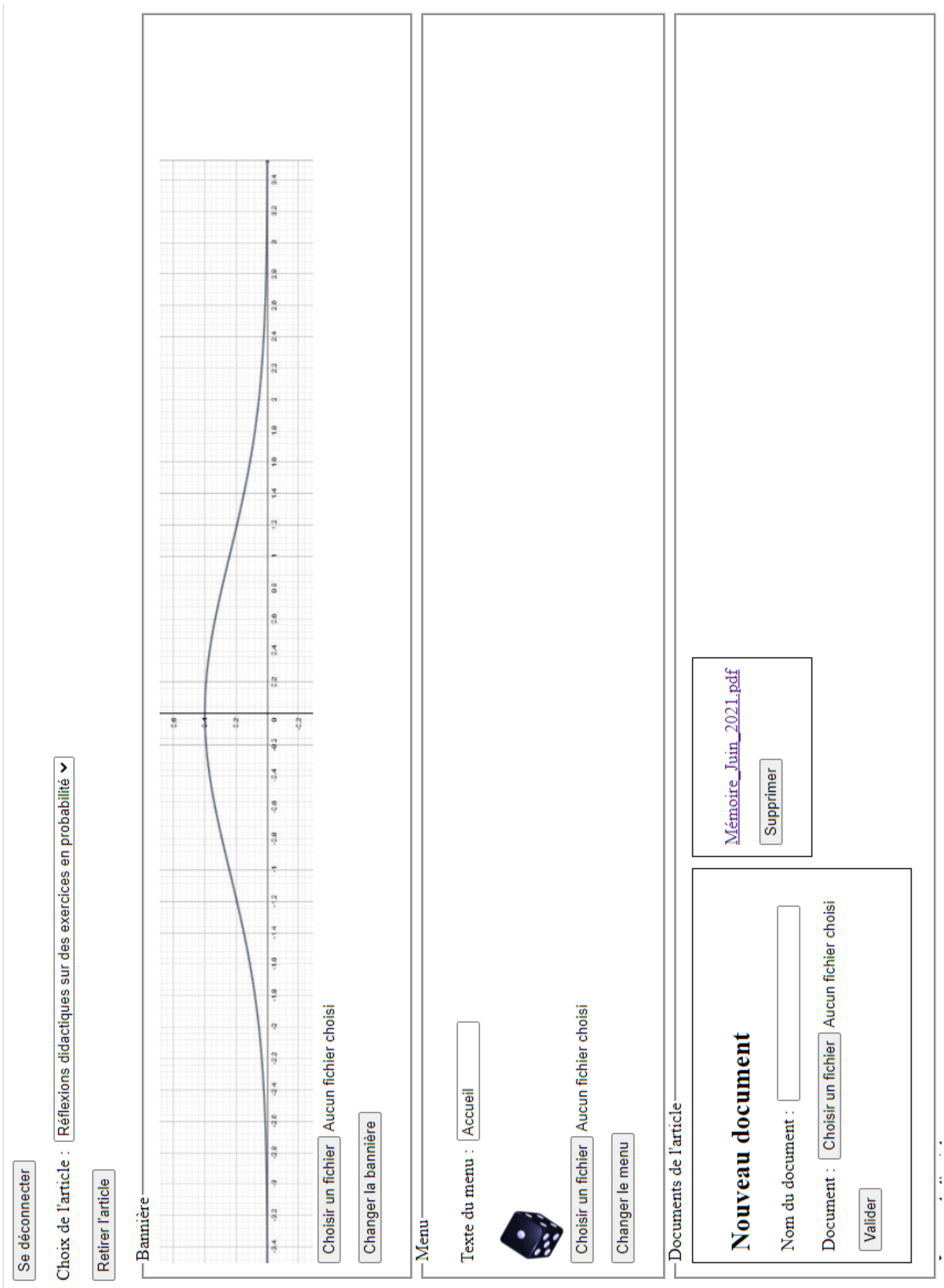


FIGURE 4.13 – Début de la face cachée du site

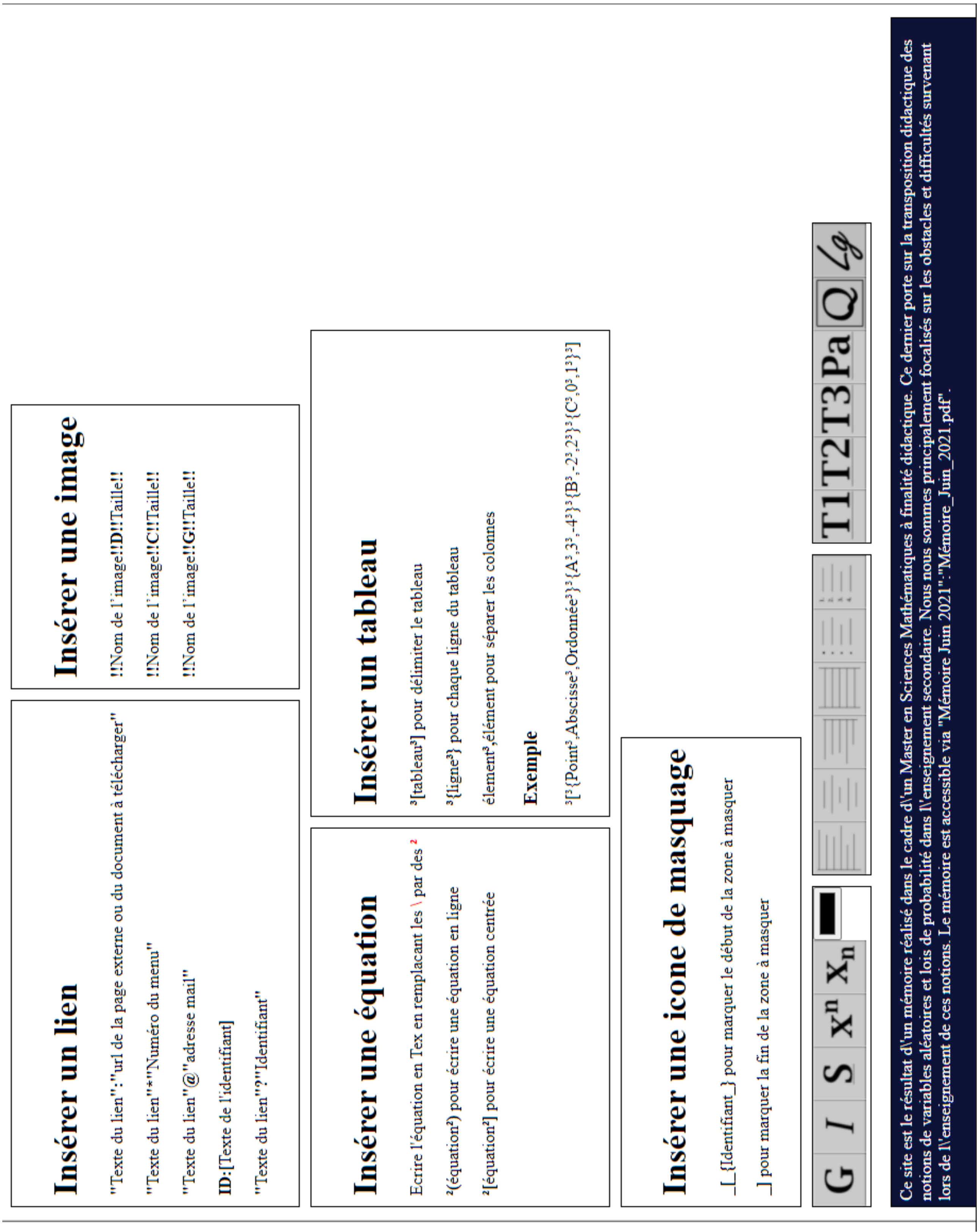


Figure 4.14 – Fin de la face cachée du site

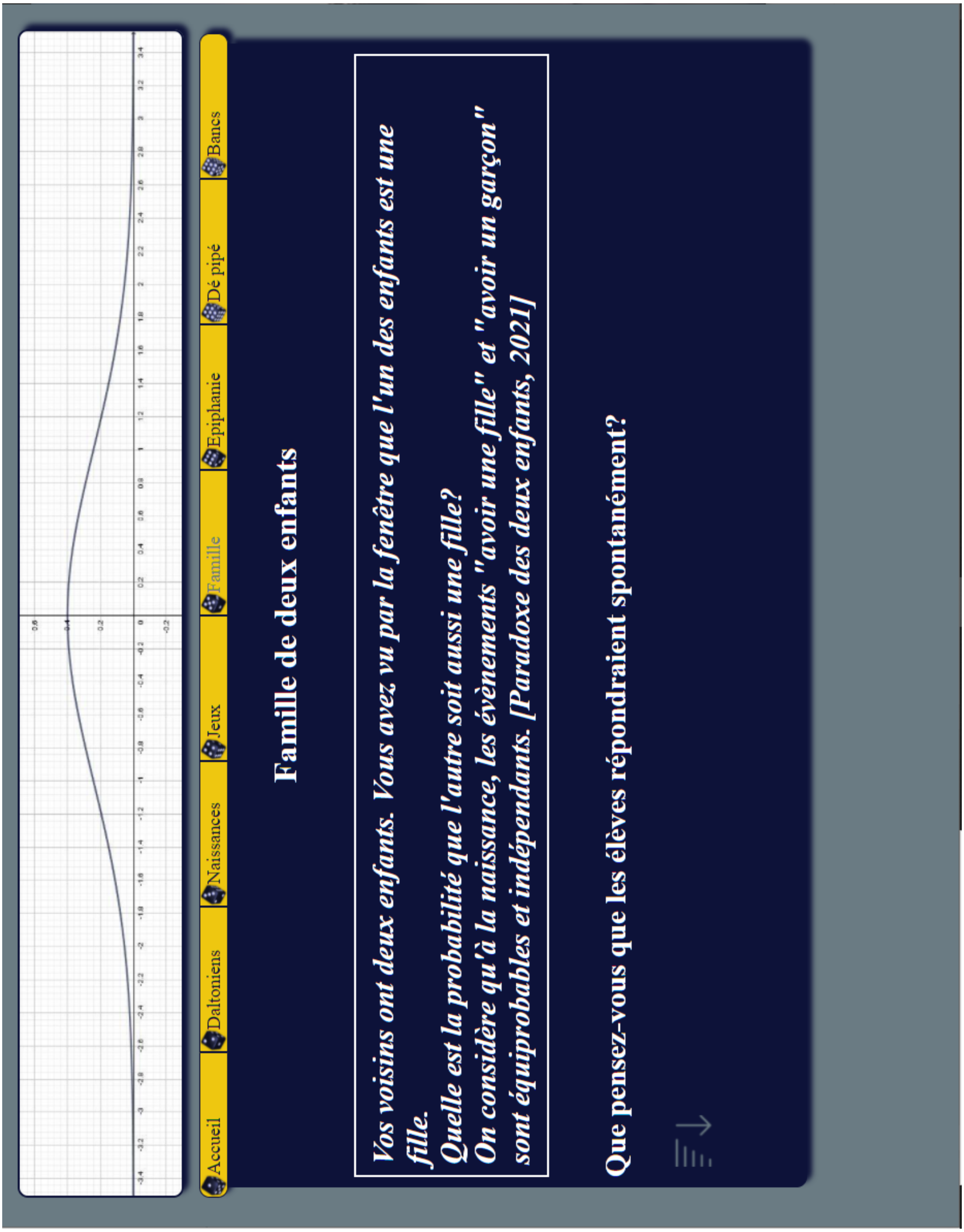


FIGURE 4.15 – Visualisation du problème de la famille de deux enfants

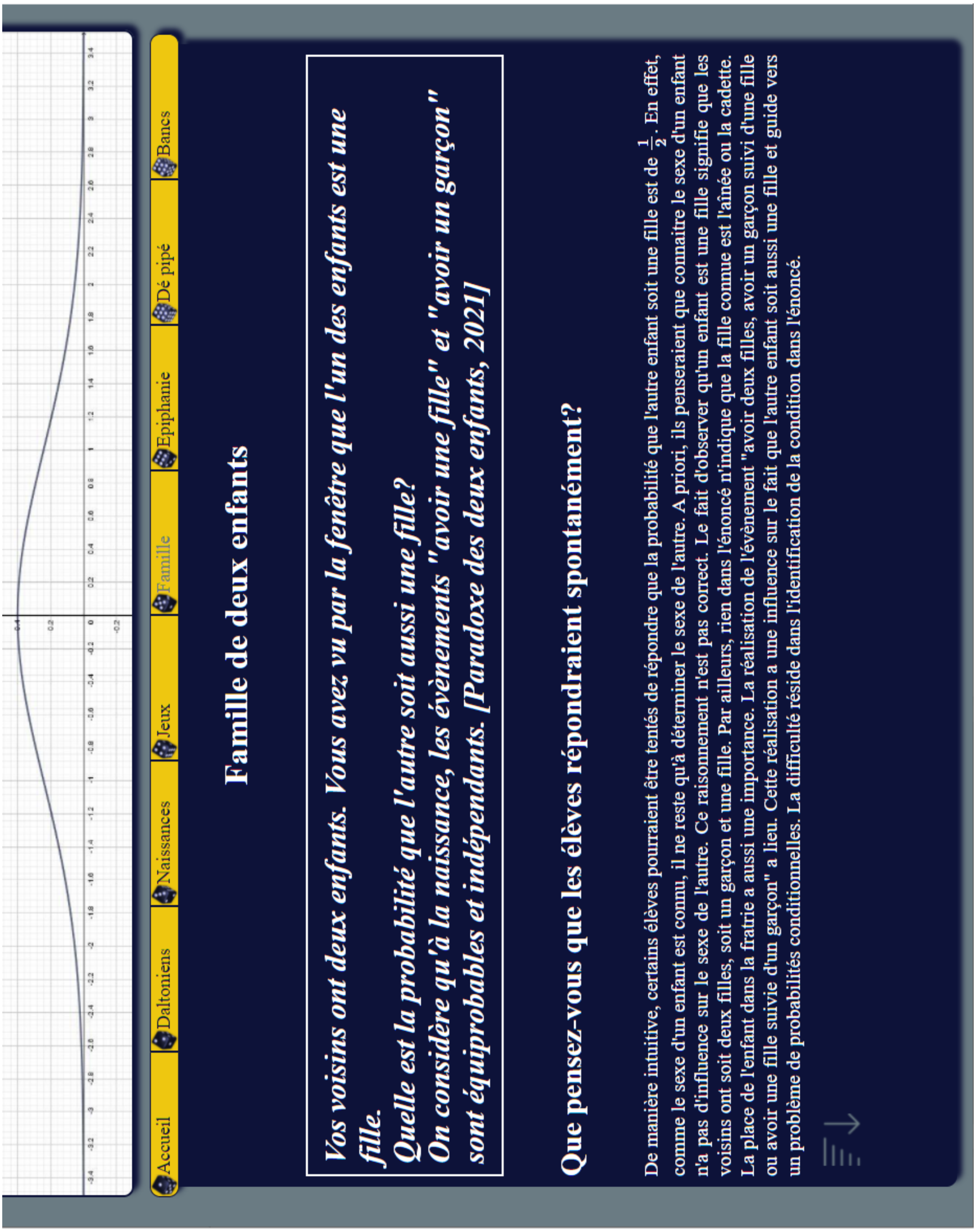
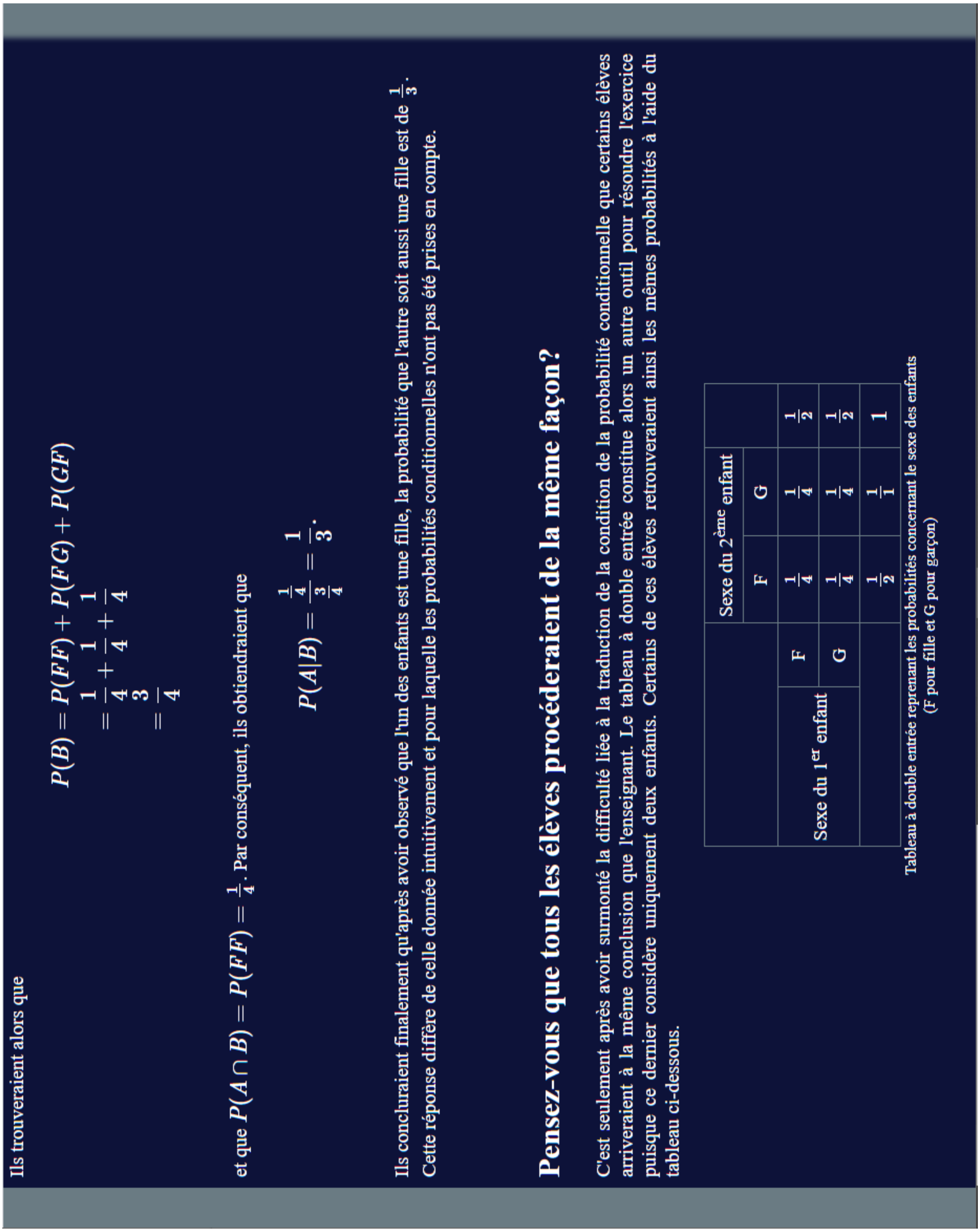


Figure 4.16 – Affichage progressif de l'analyse didactique

FIGURE 4.17 – Affichage des équations et d'un arbre de probabilité


Ils trouveraient alors que

$$P(B) = P(FF) + P(FG) + P(GF) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

et que $P(A \cap B) = P(FF) = \frac{1}{4}$. Par conséquent, ils obtiendraient que

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Ils concluraient finalement qu'après avoir observé que l'un des enfants est une fille, la probabilité que l'autre soit aussi une fille est de $\frac{1}{3}$. Cette réponse diffère de celle donnée intuitivement et pour laquelle les probabilités conditionnelles n'ont pas été prises en compte.

Pensez-vous que tous les élèves procéderaient de la même façon?

C'est seulement après avoir surmonté la difficulté liée à la traduction de la condition de la probabilité conditionnelle que certains élèves arriveraient à la même conclusion que l'enseignant. Le tableau à double entrée constitue alors un autre outil pour résoudre l'exercice puisque ce dernier considère uniquement deux enfants. Certains de ces élèves retrouveraient ainsi les mêmes probabilités à l'aide du tableau ci-dessous.

		Sexe du $2^{\text{ème}}$ enfant		
		F	G	
Sexe du 1^{er} enfant	F	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	G	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	1

Tableau à double entrée reprenant les probabilités concernant le sexe des enfants (F pour fille et G pour garçon)

Figure 4.18 – Affichage des équations et d'un tableau à double entrée

4.3 Conclusion

Pour conclure, suite à notre analyse d'exercices dans le domaine des probabilités, nous souhaitons que les enseignants ressortent plusieurs constatations et prennent conscience des obstacles et difficultés mis en évidence. Le site Internet créé permettrait le partage de l'analyse réalisée afin que cette dernière soit accessible à un plus grand nombre d'enseignants.

Premièrement, par la scénarisation de nos exercices, les enseignants peuvent se rendre compte qu'ils utilisent souvent un outil probabiliste particulier (arbre, tableau ou analyse combinatoire) et omettent les autres qui peuvent être appliqués. En effet, les enseignants ne prennent pas toujours conscience que les élèves sont susceptibles de raisonner différemment d'eux tout en arrivant aux mêmes solutions comme c'est le cas notamment dans la plupart des exercices rencontrés précédemment.

Deuxièmement, la façon d'interpréter et de comprendre les énoncés n'est pas forcément identique chez tout le monde. En effet, les hypothèses prises en compte dans les énoncés ne sont pas toujours les mêmes et poussent des fois à modéliser différemment. Il arrive alors parfois qu'en confrontant les différents modèles choisis, des réponses distinctes apparaissent. Par exemple, dans l'exercice des jeux d'argent, l'enseignant comprend qu'il faut jouer un grand nombre de fois alors que l'étudiant pourrait choisir le jeu pour une partie. De même, l'exercice des bancs comprend deux solutions différentes selon la façon de considérer l'énoncé.

Troisièmement, à la lecture des énoncés, nous sommes souvent poussés vers une résolution particulière. Par exemple, les mots « sachant que » nous indiquent que nous sommes face à des exercices de probabilités conditionnelles comme dans l'exercice du dé pipé. En revanche, il est parfois difficile d'identifier la condition et de la traduire mathématiquement, ce qui est le cas dans l'exercice de la famille de deux enfants. De plus, lorsque plusieurs étapes surviennent pour résoudre un problème, les élèves se tournent généralement vers la construction d'arbres ou de tableaux. De même, lorsque des choix d'éléments s'imposent au sein d'ensembles, l'analyse combinatoire est souvent privilégiée. Nous nous sommes rendu compte aux exercices des daltoniens, des naissances et du jeux d'argent que les enseignants identifient directement les formules et lois, ce qui n'est pas toujours le cas pour les élèves. En tant qu'enseignant, nous ne prenons pas toujours conscience que certains éléments ne sont pas explicites pour les élèves. Cependant, il est important de rester vigilant par rapport à ceux-ci puisqu'ils sont parfois utilisés dans des sens différents. C'est le cas notamment avec la notion de hasard qui est souvent prise pour l'équiprobabilité comme aux exercices de la galette des rois et des bancs.

Quatrièmement, nous disposons d'intuitions et de conceptions préalables qui nous contraignent à réfléchir uniquement dans un sens et qui nous empêchent d'élargir notre horizon de stratégies. En tant que mathématicien, nous prenons rapidement du recul et nous nous rattachons à des procédés plus rigoureux et formels. Il faut donc en prendre conscience puisque ce n'est pas forcément le cas pour les étudiants.

Conclusion

Au terme de ce mémoire, nous ressortons principalement que le professeur est confronté à un grand nombre d'obstacles et difficultés lors de l'enseignement des probabilités. La prise de conscience de ces derniers n'est pas toujours présente chez l'enseignant et nécessite par conséquent des éclairages et réflexions didactiques.

Tout d'abord, nous avons remarqué que le processus de transposition didactique est inévitable en mathématiques mais entraîne des complications. Il est nécessaire de s'éloigner du savoir de référence dans le but de le rendre accessible à un plus grand nombre tout en en conservant un certain équilibre. En effet, il ne faut pas trop s'écarter du savoir savant pour éviter de produire des erreurs et à l'inverse, il ne faut pas en être trop proche afin d'être compris par tous. Après avoir comparé les notions de probabilité, de variables aléatoires et lois de probabilité dans les référentiels du secondaire et dans des références du savoir savant, nous dégageons plusieurs différences. Globalement, nous avons repéré que dans le savoir savant, les contenus sont développés plus en profondeur que dans le savoir à enseigner. En effet, des liens avec d'autres domaines sont par exemple réalisés alors que ce n'est pas le cas dans le savoir à enseigner. De plus, nous avons constaté un écart lié à la présence de notions implicites, aux formulations (rigueur, langage utilisé, etc.), aux procédés de simplification (notations, appellations, etc.), aux illustrations (graphiques, tableaux, etc.) et aux contextualisations (repères historiques, explorations, etc.).

Ensuite, de ces constats, nous avons déduits deux hypothèses relatives aux difficultés survenant lors de l'enseignement des probabilités, variables aléatoires et lois de probabilité. La première hypothèse est directement liée aux conclusions tirées du comparatif entre le savoir savant et le savoir à enseigner. En effet, elle concerne l'observation d'un décalage entre le savoir de l'enseignant sortant de l'université et le savoir réellement enseigné dans le secondaire. L'enseignant disposant d'un large éventail de connaissances doit se mettre à la place des élèves, doit contextualiser certains concepts pour réduire le degré d'abstraction, doit adapter son discours et trouver des alternatives pour satisfaire un public d'apprenants et enfin doit jongler entre le statut des concepts, ces derniers pouvant être considérés comme objet ou comme outil. La deuxième hypothèse traduit une différence de raisonnement en probabilité par rapport aux autres branches des mathématiques. Cette dernière a été déduite à partir d'obstacles et difficultés relevés sur différents aspects : la notion de hasard est liée à plusieurs conceptions ; la notion de probabilité pose question en raison des différentes définitions qui lui sont associées (approches fréquentiste, laplacienne ou axiomatique) ; la taille des échantillons n'est pas toujours prise en compte ; la décomposition des expériences aléatoires n'est pas forcément évidente ; les notions d'indépendance et de probabilité conditionnelle entrainent parfois des confusions liées notre intuition et à la chronologie des évènements ; la notion d'évènement impossible repose sur des concepts abstraits et non définis dans le savoir à enseigner ; les expressions de la vie courante influencent nos perceptions et le rapport à la réalité induit différentes modélisations.

De plus, nous avons analysé des exercices dans lesquels les différents obstacles et difficultés apparaissent. Cette analyse a été pensée pour que l'enseignant soit directement confronté à ceux-ci et qu'il en prenne conscience. L'objectif de cette dernière partie est que l'enseignant se place dans une démarche réflexive face aux exercices et problèmes rencontrés en probabilité. De manière générale, lorsque nous abordons un nouvel exercice, nous sommes souvent influencés par notre intuition. Cependant, notre esprit de mathématicien nous incite à renoncer à celle-ci afin de développer des stratégies plus rigoureuses. En tenant compte de ce processus, l'enseignant est capable de mieux réagir face aux réflexions de ses étudiants mais surtout de se mettre à leur place. Nous avons par ailleurs remarqué que nous utilisons principalement toujours le même type d'outil face à des exercices de probabilité. Néanmoins, nous oublions qu'il en existe d'autres qui sont parfois plus adéquats à la situation rencontrée. En outre, nous ne comprenons et n'interprétons pas tous de la même façon les énoncés des exercices. Dès lors, les modèles que nous construisons bien qu'ils traduisent une même réalité peuvent nous mener à des solutions différentes.

Enfin, dans le but de fournir une aide aux enseignants, nous souhaiterions partager notre analyse via un site Internet. Ce dernier étant déjà créé, une perspective serait de l'améliorer par l'apport de ressources supplémentaires et en lien avec l'enseignement des probabilités. La finalité serait d'élaborer un véritable dispositif de formation à destination d'enseignants pour l'UAA des variables aléatoires et lois de probabilité.

Table des figures

Liste des tableaux

Bibliographie

[Adam et Lousberg, 2012] ADAM, A. et LOUSBERG, F. (2012). *Espace Math* 5^e : 6^e *théorie : tome 2 : géométrie & compléments, 6 périodes par semaine.* Manuel, Bruxelles, Belgique, de boeck 2ème édition.

[Batanero *et al.*, 2005] BATANERO, C., HENRY, M. et AL. (2005). *Exploring Probability in School Challenges for Teaching and Learning.* Springer, Melbourne, Australia.

[Borovkov, 2003] BOROVKOV, Alexandr, A. (2003). *Probability theory.* Novosibirsk, Russia, springer 4ème édition.

[Bronckart et Plazaola Giger, 1998] BRONCKART, J.-P. et PLAZAOLA GIGER, M. I. (1998). *La transposition didactique. Histoire et perspectives d'une problématique fondatrice. Pratiques*, 97-98:35–58.

[Brousseau, 1998] BROUSSEAU, G. (1998). *Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique.* La théorie des situations didactiques, La pensée sauvage, pp.115-160.

[Brousseau, 2003] BROUSSEAU, G. (2003). *Erreurs, difficultés, obstacles.*

[Chevallard, 1982] CHEVALLARD, Y. (1982). *Pourquoi la transposition didactique ?* IREM d'Aix-Marseille, France.

[Commission inter-IREM, 1997] COMMISSION INTER-IREM (Juin 1997). *Enseigner les probabilités au lycée : ouvertures statistiques, enjeux épistémologiques, questions didactiques et idées d'activités.* Réseau des IREM, Reims, France.

[Douady, 1993] DOUADY, R. (1993). *Enseignement de la dialectique OUTIL-OBJET et des JEUX de CADRES en formation mathématique des professeurs d'école.* Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, Colmar, France.

[Foata et Fuchs, 1998] FOATA, D. et FUCHS, A. (1998). *Calcul des probabilités. Cours, exercices et problèmes corrigés.* Paris, France, dunod 2ème édition.

[Grimmett et Stirzaker, 2001] GRIMMETT, Geoffrrey, R. et STIRZAKER, David, R. (2001). *Probability and Random Processes.* Oxford, Royaume-Uni, presses universitaires d'oxford 3ème édition.

[Grosse-Erdmann, 2020] GROSSE-ERDMANN, K. (Année académique 2019-2020). *Probabilités et Statistique.* Notes de cours, Université de Mons, Belgique.

[Hardy, 2020a] HARDY, A. (Année académique 2019-2020a). *SMATB109 - Probabilités discrètes.* Notes de cours, Université de Namur, Belgique.

[Hardy, 2020b] HARDY, A. (Année académique 2019-2020b). *SMATB302 - Mesure et intégration.* Notes de cours, Université de Namur, Belgique.

[Henry, 1999] HENRY, M. (1999). *L'enseignement des probabilités : Perspectives historiques, épistémologiques et didactiques.* Publication de L'IREM de Besançon, Paris, France.

[Jacob et Protter, 2003] JACOB, J. et PROTTER, P. (2003). *L'essentiel en théorie des probabilités.* Paris, France, cassini 2ème édition.

[Laurent et al., 2017] Laurent et al. (2017). *Les probabilités et la statistique au lycée. Pour un enseignement et une formation sans alea... ou presque*. Presses universitaires de Franche-Comté.

[Loi uniforme, 2021] Loi uniforme (consulté le 19 mars 2021). *Loi uniforme*. `http://www.jaicompris.com/lycee/math/probabilite/loi-uniforme.php`.

[Mai Anh, 2018] Mai Anh, P. T. (Année académique 2017-2018). *Du savoir savant au savoir enseigné : pour une meilleure compréhension du processus transpositif dans la collaboration entre l'ingénieur pédagogique et l'expert métier. Sciences de l'Homme et Société*. Mémoire de D.E.A., Université de Grenoble Aples, France.

[Ministère de la Communauté française, 2014] Ministère de la Communauté française (2014). *Moniteur belge*. référentiels, 1ère édition. N. 115.

[Nechache, 2016] Nechache, A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire. Histoire et perspectives sur les mathématiques*. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot Paris 7.

[Noël, 1993] Noël, G. (1993). *Evolution de l'Enseignement des Mathématiques en Belgique francophone*.

[Perrenoud, 1998] Perrenoud, P. (1998). *La transposition didactique à partir de pratiques : des savoirs aux compétences. Revue des sciences de l'éducation*, 24(3):487–514.

[Paradoxe des deux enfants, 2021] Paradoxe des deux enfants (consulté le 14 mai 2021). *Paradoxe des deux enfants*. `https://www.youtube.com/watch?v=iKrtXXopzbE`.

[PC1-Probabilités discrètes, 2019] PC1-Probabilités discrètes (15 avril 2019). *PC1-Probabilités discrètes. Ecole Polytechnique-MAP361*.

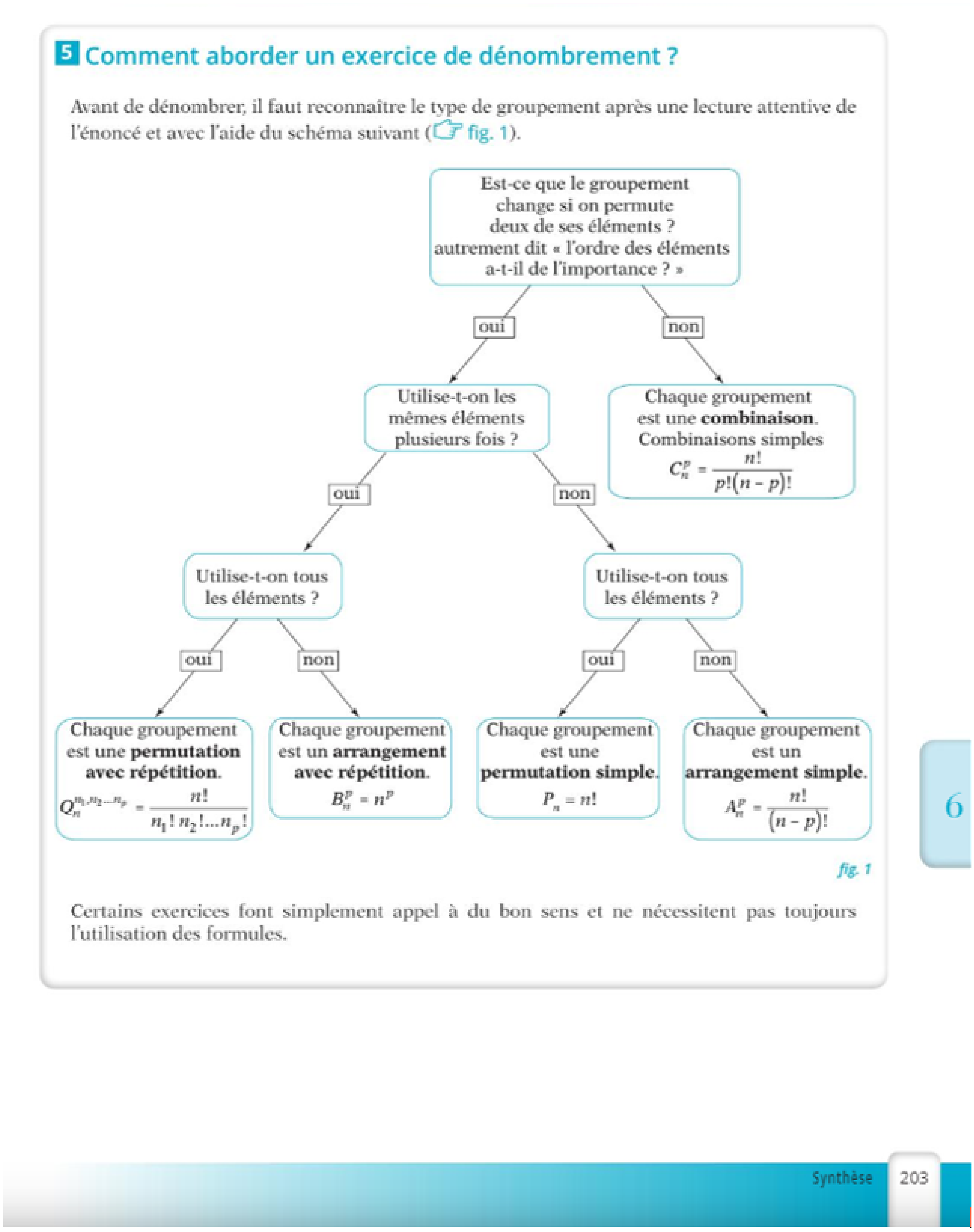
[Ross, 2014] Ross, S. M. (2014). *Initiation aux probabilités*. Lausanne, Suisse, presses polytechniques et universitaires romandes 4ème édition.

[Van Eerdenbrugghe et Bousson, 2011] Van Eerdenbrugghe, A. et Bousson, A. (2011). *Cqfd maths* 6^{e} *: 4 périodes/ semaine*. Manuel, Bruxelles, Belgique, de boeck 1ère édition.

[Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018] Van Eerdenbrugghe, A., Bousson, A. et al. (2018). *Cqfd maths* 6^{e} *: 4 périodes/ semaine*. Manuel, Bruxelles, Belgique, de boeck 2ème édition.

[Xhonneux, 2013] Xhonneux, S. (2013). *Regards institutionnels sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie*. Thèse de doctorat, Université de Namur, Belgique.

Annexe



5 Comment aborder un exercice de dénombrement ?

Avant de dénombrer, il faut reconnaître le type de groupement après une lecture attentive de l'énoncé et avec l'aide du schéma suivant (fig. 1).

fig. 1

Certains exercices font simplement appel à du bon sens et ne nécessitent pas toujours l'utilisation des formules.

6

Synthèse 203

Formules de l'analyse combinatoire prélevées dans [Van Eerdenbrugghe *et al.*, 2018]